Courbes planes

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Généralités

Si l'on étudie le mouvement d'un point dans l'espace au court du temps, à chaque instant t, celui occupe une position $P(t)$. Les coordonnées de ce point, dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, dépendent de l'instant t et sont donc de la forme $(f(t),g(t),h(t))$ où f,g et h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. La fonction qui, à t, associe $(f(t),g(t),h(t))$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.
Nous allons nous intéresser, dans le cadre de ce cours, aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Toutefois certaines définitions peuvent être facilement généralisées à $\mathbb{R}^3$ ou même $\mathbb{R}^n$ où $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Remarque

On notera indifféremment les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous forme de vecteurs lignes ou de vecteurs colonnes.

Définition

On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle toute fonction de I dans un espace vectoriel réel E.

Remarques

- Puisque l'on peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, les fonctions de variables réelles à valeurs complexes peuvent être considérées comme des fonctions vectorielles.
- Une fonction vectorielle est généralement notée $\vec{F}$ et, par abus, parfois $\vec{F}(t)$.
- Pour les fonctions vectorielles qui nous intéressent c'est-à-dire celles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, on a $\vec{F} = (f,g)$ où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. L'étude de la fonction vectorielle $\vec{F}$ revient à l'étude de ces deux fonctions f et g.
- Toujours par abus de notation, on peut rencontrer la notation $(f(t),g(t))$ pour une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définitions

Soit $\vec{F} = (f,g)$ une fonction vectorielle définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- On dit que $\vec{F}$ admet une limite finie $\vec{l}\,(\in\mathbb{R}^2)$ quand t tend vers t_0 (adhérent à I) et on note $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t) = \vec{l}$ si et seulement si $\vec{l} = (l_1,l_2)$ avec $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = l_1$ et $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = l_2$.
- On dit que $\vec{F}$ est continue en $t_0\in I$ si et seulement si $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$.
- On dit que $\vec{F}$ est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.

Remarques

- La limite, si elle existe, est unique.
- $\vec{F} = (f,g)$ est continue en t_0 si et seulement si f et g sont continues en t_0.
- $\vec{F} = (f,g)$ est continue sur I si et seulement si f et g sont continues sur I.

Définition

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle de I dans $\mathbb{R}^2$.

On dit que $\vec{F}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si la fonction vectorielle $t \mapsto \dfrac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0}$ admet une limite finie quand t tend vers t_0.
Lorsque cette limite existe, on la note $\vec{F}'(t_0)$. Elle est appelée vecteur dérivé de $\vec{F}$ en t_0.
On dit que $\vec{F}$ est dérivable sur I si et seulement si $\vec{F}$ est dérivable en tout point de I.

Propriété

Soit $\vec{F} = (f,g)$ une fonction vectorielle de I dans $\mathbb{R}^2$.
$\vec{F}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si f et g sont dérivables en t_0. Dans ce cas, on a $\vec{F}'(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0))$.

Remarques

- $\vec{F} = (f,g)$ est dérivable sur $I \Leftrightarrow f$ et g sont dérivables sur I.
- Si $\vec{F}$ est dérivable sur I, l'application qui, à tout $t_0 \in I$, associe $\vec{F}'(t_0)$ est appelée fonction dérivée de $\vec{F}$ et est notée $\vec{F}\,'$ ou $\dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}t}$
- On définit de proche en proche les dérivées successives de $\vec{F}$.
  Par exemple, $\vec{F}'' = \left(\vec{F}'\right)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{F}}{\mathrm{d}t^2}$.
- Si on munit le plan euclidien d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, pour une fonction vectorielle $\vec{F} = (f,g)$ de I dans $\mathbb{R}^2$, pour une valeur de t de I, on peut considérer le point M tel que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ait pour coordonnées $(f(t),g(t))$ dans $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
  Par abus de langage, on note $\overrightarrow{OM}(t) = (f(t),g(t))$.
- En cinématique, le vecteur dérivé premier de $\overrightarrow{OM}(t)$, correspond au vecteur vitesse et le vecteur dérivé second correspond au vecteur accélération.

Exemple

Un mobile M se déplace sur une trajectoire $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3\ln t \\ y(t) = e^t - 1 \end{cases}$ pour $t > 0$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{OM}(t)$ a pour coordonnées $(x(t),y(t))$ dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le vecteur vitesse à un instant t_0 est $\vec{V}\left(3t_0^2 - \dfrac{3}{t_0}, e^{t_0}\right)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le vecteur accélération à un instant t_0 est $\vec{\Gamma}\left(6t_0 + \dfrac{3}{t_0^2}, e^{t_0}\right)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Propriété

Soient $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux fonctions vectorielles de I dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dérivables sur I.
Soient λ un réel et φ une fonction numérique définie et dérivable sur I.
Alors, on a sur I :

a. $(\lambda\vec{F})' = \lambda\vec{F}'$
b. $(\vec{F} + \vec{G})' = \vec{F}' + \vec{G}'$
c. $(\vec{F}.\vec{G})' = \vec{F}'.\vec{G} + \vec{F}.\vec{G}'$
d. $(\vec{F}\wedge\vec{G})' = \vec{F}'\wedge\vec{G} + \vec{F}\wedge\vec{G}'$
e. $(\varphi\vec{F})' = \varphi'\vec{F} + \varphi\vec{F}'$

Exemple

Soient $\vec{F}(t) = (t^2 - 5t + 1, 1 - t)$ et $\vec{G}(t) = (t + 3; 2t^2 - t - 1)$.
On veut calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{F}.\vec{G}\right)$.

1ère méthode : $\vec{F}'(t) = (2t - 5, -1)$ et $\vec{G}'(t) = (1, 4t - 1)$

$$\vec{F}'(t).\vec{G}(t) + \vec{F}(t).\vec{G}'(t) = 2t^2 - 5t + 6t - 15 - 2t^2 + t + 1 + t^2 - 5t + 1 + 4t - 4t^2 - 1 + t.$$
$$= -3t^2 + 2t - 14$$

2ème méthode : $\vec{F}(t).\vec{G}(t) = t^3 - 5t^2 + t + 3t^2 - 15t + 3 + 2t^2 - t - 1 - 2t^3 + t^2 + t.$

$$= -t^3 + t^2 - 14t + 4$$
$$(\vec{F}(t).\vec{G}(t))' = -3t^2 + 2t - 14.$$

Propriété (*Développement de Taylor*)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle continûment dérivable jusqu'à l'ordre $p + 1$ sur I.
Soient t_0 intérieur à I et $h \in \mathbb{R}$ / $(t_0 + h) \in I$
On a : $\vec{F}(t_0 + h) = \vec{F}(t_0) + h\vec{F}'(t_0) + \dfrac{h^2}{2!}\vec{F}''(t_0) + \ldots\ldots + \dfrac{h^p}{p!}\vec{F}^{(p)}(t_0) + h^p\vec{\varepsilon}(h)$.

avec $\lim\limits_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.

Exemple

Soit $\vec{F}(t) = (t^2 + 5t; \ln t)$.
On veut déterminer le développement de Taylor de $\vec{F}$ en 1 à l'ordre 2.

1ère méthode :

$\vec{F}(t) = (t^2 + 5t; \ln t)$ et $\vec{F}(1) = (6, 0)$

$\vec{F}'(t) = \left(2t + 5, \dfrac{1}{t}\right)$ et $\vec{F}'(1) = (7, 1)$

$\vec{F}''(t) = \left(2, -\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\vec{F}''(1) = (2, -1)$

D'où $\vec{F}(1 + h) = \vec{F}(1) + h\vec{F}'(1) + \dfrac{h^2}{2!}\vec{F}''(1) + h^2\vec{\varepsilon}(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0} = (0; 0)$

$$\vec{F}(1 + h) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + h^2\vec{\varepsilon}(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0} = (0; 0)$$

$$\vec{F}(1 + h) = \begin{pmatrix} 6 + 7h + h^2 \\ h - \dfrac{h^2}{2} \end{pmatrix} + h^2\vec{\varepsilon}(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0} = (0; 0)$$

2ème méthode :

$x(t) = t^2 + 5t$

$x(1 + h) = (1 + h)^2 + 5(1 + h) = h^2 + 2h + 1 + 5 + 5h = 6 + 7h + h^2$

$y(t) = \ln t$

$y(1 + h) = \ln(1 + h) = h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2) = h - \dfrac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_2(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0$.

On obtient le résultat en posant $\vec{\varepsilon}(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2(h) \end{pmatrix}$.

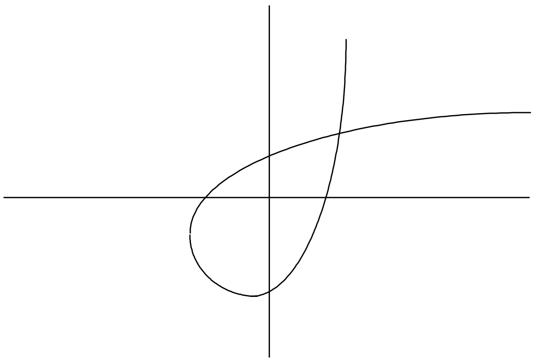
2. Courbes paramétrées

Définition

On appelle courbe (ou arc) paramétrée plane (en coordonnées cartésiennes) la donnée d'un couple $(\vec{F}, I)$ où $\vec{F} = (x,y)$ est une fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et $I \subset D_{\vec{F}}$.
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère (orthonormal) du plan. On appelle support de la courbe (ou de l'arc) l'ensemble des points dont les coordonnées correspondent à $\vec{F}(I)$ c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}(t)$ (vecteur du plan) ait pour coordonnées $\vec{F}(t) = (x(t),y(t))$ (vecteur de $\mathbb{R}^2$) dans $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ quand t varie sur I.

Remarques

- On parlera plutôt de courbe si $I = D_{\vec{F}}$ (qui peut être à déterminer).
- Par abus, on note parfois $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t)$.
- Soit $\vec{F}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\vec{F}(t) = (\cos t, \sin t)$ et soit $\vec{G}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\vec{G}(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$.
  Les arcs $(\vec{F},\mathbb{R})$, $(\vec{F},[0;2\pi])$ et $(\vec{G},[0;2\pi])$ ne sont pas les mêmes mais ont même support qui est le cercle trigonométrique.
- Une grande différence avec les courbes représentatives classiques est la possibilité d'avoir pour une même valeur de x plusieurs valeurs de y possibles dans une courbe paramétrée.



- La courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I peut être paramétrée par le système $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ où $t \in I$. Mais aussi par $\begin{cases} x(t) = \psi(t) \\ y(t) = (go\psi)(t) \end{cases}$ où ψ est une bijection d'un intervalle J dans I et $t \in J$. $\mathscr{C}$ est le support de $(\vec{G}, I)$ où $\vec{G}(t) = (t,g(t))$.

Exemples

- Les courbes paramétrées (t,t^2) où $t\in\mathbb{R}$, (t^3,t^6) $t\in\mathbb{R}$ et $(\tan t, \tan^2 t)$ où $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ont même support qui est la courbe représentative de la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$.
  Toutefois ces courbes paramétrées sont bien différentes.
- Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array}$ et soit C sa courbe représentative.
  On peut paramétrée C par $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}_+^*$ ou par $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \ln(t^2) \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}_+^*$.
  On peut remarquer que, dans ce dernier cas, si on avait pris $t\in\mathbb{R}^*$ la courbe n'aurait pas été la même bien qu'elle aurait eu le même support.
  On peut aussi dire que le graphique est le même mais la façon dont on le parcourt est différente.

Remarque

On pourra parfois se ramener à une courbe représentative classique à partir d'une courbe paramétrée. Mais ce type de courbe n'offre pas énormément d'intérêts dans ce cours.
Par exemple, soit Γ la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = t^3 + 1 \\ y(t) = t^2 + 5t + 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
On a $t = \sqrt[3]{x-1}$ et donc le support de Γ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sqrt[3]{x-1}\,)^2 + 5\sqrt[3]{x-1} + 3$.

Propriété

Soit $(\vec{F},I)$ un arc paramétré où $\vec{F}$ est une fonction vectorielle sur I.
Soit φ une bijection continue de I sur J et soit $\vec{G} = \vec{F} \circ \varphi^{-1}$ c'est-à-dire $\vec{F} = \vec{G} \circ \varphi$.
On dit que l'arc paramétré $(\vec{G},J)$ est un reparamétrage de $(\vec{F},I)$.

2.1 Domaine de définition et domaine utile d'étude

Définitions

L'ensemble de définition de la courbe paramétrée Γ définie par la donnée du couple de fonctions $\vec{F} = (x,y)$ est l'intersection des ensembles de définition des fonctions x et y.
On dit que la courbe est simple si et seulement si $\vec{F}$ est une injection.
On dit qu'une courbe simple est un chemin si son ensemble de définition est intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Propriété

Soient T_1 et T_2 deux réels et soit T le plus petit multiple commun à T_1 et T_2 s'il existe. C'est-à-dire, s'il existe $k,k' \in \mathbb{Z}$ tels que $T = kT_1 = k'T_2$.
Soit Γ une courbe paramétrée définie sur D_Γ par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t))$.
On suppose de plus que D_Γ est stable par une translation de T.
Si x est périodique de plus petite période T_1 et si y est périodique de plus petite période T_2, alors il suffit d'étudier Γ sur l'intersection de D_Γ avec tout intervalle de longueur T car $M(t + T) = M(t)$.

Exemple

Soit Γ la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \tan\dfrac{t}{3} \\ y(t) = \sin\dfrac{2t}{5} \end{cases}$.
Il faut $\dfrac{t}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. C'est-à-dire $D_\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{3\pi + 6k\pi}{2}\ k \in \mathbb{Z}\}$.
x est périodique de période 3π car tan est périodique de période π.
y est périodique de période 5π car sin est périodique de période 2π.
Donc il suffit d'étudier Γ sur l'intersection de D_Γ avec un intervalle de longueur 15π.
On pourra, par exemple, prendre : (ce n'est pas le plus simple, introduire la notion de symétrie)
$\left[0; \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{9\pi}{2}; \frac{15\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{15\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{21\pi}{2}; \frac{27\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{27\pi}{2}; 15\pi\right]$

Propriété

Soit Γ une courbe paramétrée définie par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t))$
Soient t_1 et t_2 deux éléments différents de D_Γ.

Cas 1 : Si $x(t_2) = x(t_1)$ et $y(t_2) = y(t_1)$ alors les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont identiques.
Cas 2 : Si $x(t_2) = x(t_1)$ et $y(t_2) = -y(t_1)$ alors $M(t_2)$ est obtenu à partir de $M(t_1)$ par la symétrie d'axe Ox.
Cas 3 : Si $x(t_2) = -x(t_1)$ et $y(t_2) = y(t_1)$ alors $M(t_2)$ est obtenu à partir de $M(t_1)$ par la symétrie d'axe Oy.
Cas 4 : Si $x(t_2) = -x(t_1)$ et $y(t_2) = -y(t_1)$ alors $M(t_2)$ est obtenu à partir de $M(t_1)$ par la symétrie par rapport à O.
Cas 5 : Si $x(t_2) = y(t_1)$ et $y(t_2) = x(t_1)$ alors $M(t_2)$ est obtenu à partir de $M(t_1)$ par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Cas 6 : Si $x(t_2) = -y(t_1)$ et $y(t_2) = -x(t_1)$ alors $M(t_2)$ est obtenu à partir de $M(t_1)$ par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Conséquence 1

Soit Γ une courbe paramétrée définie par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t))$.
On suppose que D_Γ est un ensemble symétrique par rapport à l'origine.
Si x est paire ou impaire et si y est paire ou impaire,
ou si, $\forall t\in D_\Gamma$, $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$
ou si, $\forall t\in D_\Gamma$, $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$,
alors nous sommes dans l'un des 6 cas précédents, le point $M(-t)$ est obtenu à partir de $M(t)$ par l'une des symétries énumérées et on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $D_\Gamma \cap \mathbb{R}^+$ (ou $D_\Gamma \cap \mathbb{R}^-$ suivant l'intérêt).
La deuxième partie de la courbe est obtenue par la transformation du plan correspondant au cas.

Exemple

Soit Γ la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$.
On a $D_\Gamma = \mathbb{R}$.
x est périodique de période 2π et y est périodique de période 2π.
Donc il suffit d'étudier Γ sur un intervalle de longueur 2π.

De plus, x est paire et y est impaire c'est-à-dire $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ pour tout réel t.
Donc, on réduit l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$, les points correspondants à l'intervalle $[-\pi,0]$ étant obtenus des premiers par la symétrie d'axe Ox.

Définition

On dit qu'un ensemble E de $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à $\alpha\in\mathbb{R}$ si et seulement si on a l'implication :
$x\in E \Rightarrow (2\alpha - x)\in E$.

Exemples

- Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$. L'intervalle $[0,R]$ est symétrique par rapport à $\frac{R}{2}$.
  En effet, $x\in[0,R] \Rightarrow 0 \le x \le R$
  $\Rightarrow -R \le -x \le 0$
  $\Rightarrow -R + R \le -x + R \le 0 + R$
  $\Rightarrow 0 \le R - x \le R$
  $\Rightarrow (R - x)\in[0,R]$
- Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$.
  L'ensemble $\left[0;\frac{R}{4}\right[\cup \left]\frac{3R}{4};R\right]$ est symétrique par rapport à $\frac{R}{2}$.
- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 3.
- $[-1;0]\cup[2;3]$ est symétrique par rapport à 1.

Conséquence 2

Soit Γ une courbe paramétrée définie par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t))$.
Si D_Γ est symétrique par rapport à $\dfrac{R}{2}$ où $R \in \mathbb{R}$ et si, $\forall t_1,t_2 \in D_\Gamma$ vérifiant $t_1 + t_2 = R$, nous sommes dans l'un des 6 cas précédents alors le point $M(t_2) = M(R - t_1)$ est obtenu à partir du point $M(t_1)$ par l'une des symétries énumérées et on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $D_\Gamma \cap \left]-\infty; \dfrac{R}{2}\right]$ (ou à $D_\Gamma \cap \left[\dfrac{R}{2};+\infty\right[$ suivant l'intérêt).
La deuxième partie de la courbe est obtenue par la transformation du plan correspondant au cas.

Remarques

- Si $D_\Gamma = [0,R]$, il suffira d'étudier sur $\left[0, \dfrac{R}{2}\right]$ ou sur $\left[\dfrac{R}{2}, R\right]$.
- La conséquence 2 est une généralisation de la conséquence 1. En effet , la conséquence 1 correspond au cas $R = 0$.

Exemple

Soit Γ la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ (exemple précédent).
On sait déjà qu'il suffit d'étudier Γ sur $[0, \pi]$.

On a : $[0, \pi]$ symétrique par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$
$x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ pour tout t de $[0, \pi]$.
Le point $M(\pi - t)$ est donc obtenu à partir du point $M(t)$ par la symétrie d'axe Oy.
Donc on réduit l'intervalle d'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, les points correspondants à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ étant obtenus des premiers par la symétrie d'axe Oy.

De plus : $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est symétrique par rapport à $\dfrac{\pi}{4}$.
$x\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t = y(t)$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t = x(t)$ pour tout t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc on réduit l'intervalle d'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, les points correspondants à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ étant obtenus des premiers par la symétrie d'axe $y = x$.

Il n'y a plus de résultats intéressants en ce qui concerne $x\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right)$ et $y\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right)$.

Propriété

Soit φ une fonction numérique et soit $\mathcal{T}$ une transformation du plan.
Soit Γ une courbe paramétrée définie sur D_Γ.
On suppose que $D_\Gamma = \Delta \cup \varphi(\Delta)$
$\forall t_1 \in \Delta$, si $t_2 = \varphi(t_1)$ alors $M(t_2)$ est l'image de $M(t_1)$ par $\mathcal{T}$.
Alors il suffit d'étudier Γ sur Δ.

Remarque

Cette propriété intègre les situations précédentes.

Exemple

Soit Γ la courbe paramétrée définie sur $]0;+\infty[$ par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t+3}{t+2} \\ y(t) = \dfrac{3t+1}{2t+1} \end{cases}$.

Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.

On a $]0;+\infty[=]0;1[\cup]1;+\infty[$ avec $]1;+\infty[= \varphi(]0;1[)$ ou $]0;1[= \varphi(]1;+\infty[)$.

On a surtout $\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{t}\right) = y(t) \\ y\left(\dfrac{1}{t}\right) = x(t) \end{cases}$ donc $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

2.2 Etude locale

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle continûment dérivable jusqu'à l'ordre $n + 1$ sur I.

Soit Γ la courbe paramétrée définie par $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t)$ (= $(x(t),y(t))$).

Soit t_0 intérieur à I et soit $h \in \mathbb{R}$ / $(t_0 + h) \in I$.

Soit $M = M(t_0 + h)$ et $M_0 = M(t_0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(t_0 + h)$ et $\overrightarrow{OM_0} = \vec{F}(t_0)$.

On a : $\vec{F}(t_0 + h) = \vec{F}(t_0) + h\vec{F}'(t_0) + \dfrac{h^2}{2!}\vec{F}''(t_0) + \ldots\ldots. + \dfrac{h^n}{n!}\vec{F}^{(n)}(t_0) + h^n\vec{\varepsilon}(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.

Or $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{M_0O} = \vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)$.

Donc $\overrightarrow{M_0M} = h\vec{F}'(t_0) + \dfrac{h^2}{2!}\vec{F}''(t_0) + \ldots\ldots. + \dfrac{h^n}{n!}\vec{F}^{(n)}(t_0) + h^n\vec{\varepsilon}(h)$.

Soit p le plus petit indice tel que $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ est le vecteur directeur de la tangente à Γ en M_0.

Si $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$, on dit que M_0 est un point stationnaire ou singulier.

Soit q le plus petit indice tel que $\vec{F}^{(q)}(t_0)$ et $\vec{F}^{(p)}(t_0)$ ne soient pas colinéaires.

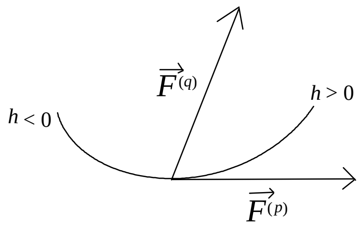
Alors au voisinage de M_0, le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ se comporte comme $h^p\vec{F}^{(p)}(t_0) + h^q\vec{F}^{(q)}(t_0)$.

Si p est impair, alors $h^p < 0$ si $h < 0$ et $h^p > 0$ si $h > 0$ et si p est pair, alors $h^p > 0$ si $h < 0$ et $h^p > 0$ si $h > 0$.

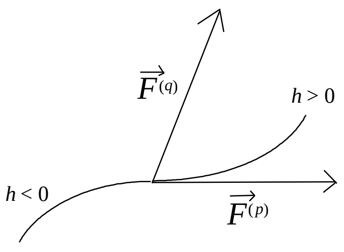
Si q est impair, alors $h^q < 0$ si $h < 0$ et $h^q > 0$ si $h > 0$ et si q est pair, alors $h^q > 0$ si $h < 0$ et $h^q > 0$ si $h > 0$.

On a donc les résultats suivants :

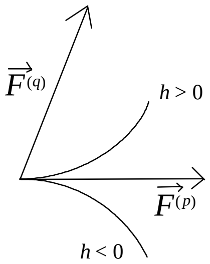
- Si p est impair et q est pair alors M_0 est un point ordinaire.



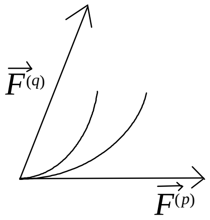
- Si p est impair et q est impair alors M_0 est un point d'inflexion.



- Si p est pair et q est impair alors M_0 est un point de rebroussement de 1ère espèce.



- Si p est pair et q est pair alors M_0 est un point de rebroussement de 2ème espèce.



Exemples

a. Etudier le comportement de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 3t^4 - 2t^3 \\ y(t) = t^2 - t \end{cases}$ au voisinage de $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{16} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 12t^3 - 6t^2 \\ y'(t) = 2t - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \end{cases}$$

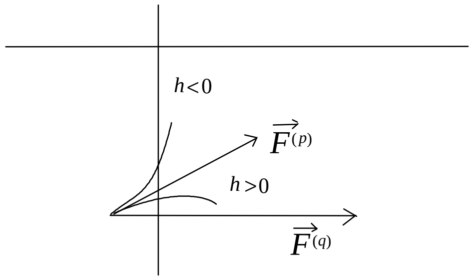
$$\begin{cases} x''(t) = 36t^2 - 12t \\ y''(t) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x''\left(\frac{1}{2}\right) = 36\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \\ y''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \qquad p = 2$$

$$\begin{cases} x'''(t) = 72t - 12 \\ y'''(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'''\left(\frac{1}{2}\right) = 72\left(\frac{1}{2}\right) - 12 = 24 \\ y'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \qquad q = 3$$

$M_0 = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{M_0M} = \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{6}\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix} + h^3\vec{\varepsilon}(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.

On a donc :



Point de rebroussement de 1ère espèce

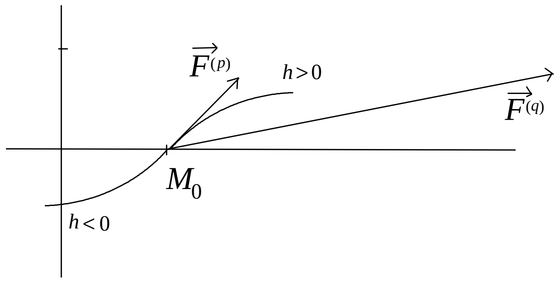
b. Etudier le comportement de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 1 + t\cos t \\ y(t) = -\dfrac{t^3}{3} + \sin t \end{cases}$ au voisinage de 0.

$x(0+h) = 1 + h - \dfrac{h^3}{2} + \dfrac{h^5}{24} + h^5\varepsilon_1(h)$

$y(0+h) = h - \dfrac{h^3}{2} + \dfrac{h^5}{120} + h^5\varepsilon_2(h)$ $\qquad x(0) = 1$ et $y(0) = 0$ donc $M_0(1,0)$

D'où $\overrightarrow{M_0M} = \left(h - \dfrac{h^3}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{h^5}{120}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + h^5\begin{pmatrix} \varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_2(h) \end{pmatrix}$

Si on pose $\vec{\varepsilon}(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_2(h) \end{pmatrix}$, on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.



Point d'inflexion

c. Etudier le comportement de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \dfrac{(t+1)^2}{t^2} \end{cases}$ au voisinage du point $-\infty$.

Puisque $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 1$, on a $M_0 = (0,1)$

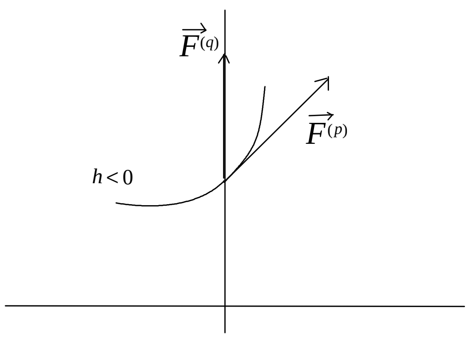
On pose $h = \dfrac{1}{t}$ lorsque t est proche de $-\infty$ alors h est proche de 0^-.

On a donc toujours $h < 0$.

$$x(t) = \frac{2t}{t^2 - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{h}}{\left(\frac{1}{h}\right)^2 - 1} = \frac{2h}{1 - h^2} = 2h + 2h^3 + o(h^3)$$

$$y(t) = \frac{(t+1)^2}{t^2} = \frac{\left(\frac{1}{h} + 1\right)^2}{\left(\frac{1}{h}\right)^2} = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$$

D'où $\overrightarrow{M_0M} = 2h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h^2\vec{\varepsilon}(h)$ $\qquad$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.



Point ordinaire

2.3 Points d'inflexion

Soit Γ une courbe paramétrée définie par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t) = (x(t), y(t))$.

Si $M_0 = M(t_0)$ est un point d'inflexion, alors le vecteur dérivé premier et le vecteur dérivé second de $\vec{F}$ en t_0 sont colinéaires c'est-à-dire $\det\left(\vec{F}'(t_0), \vec{F}''(t_0)\right) = 0$.
Les points d'inflexion de Γ se trouvent parmi les solutions de $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0$.

Attention, ceci est une condition nécessaire mais pas suffisante.
En effet, si on prend Γ définie par $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t) = (t^2,t^2)$ en $t_0 = 0$
On a bien $\det\left(\vec{F}'(t_0), \vec{F}''(t_0)\right) = 0$ (à vrai dire c'est vrai pour tout réel t).
Pourtant Γ est la première diagonale et n'a donc pas de point d'inflexion.

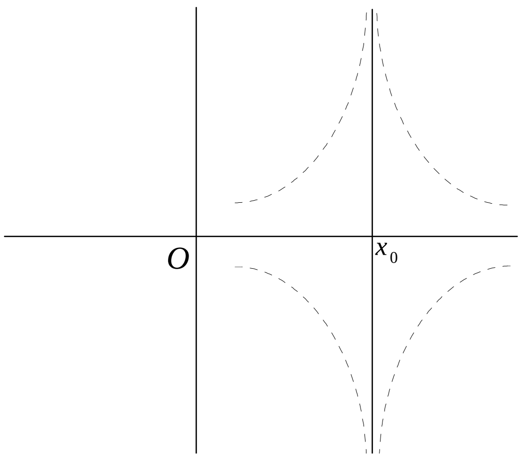
Si maintenant on considère $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ si $x'(t) \neq 0$. Ce quotient correspond à la pente de la tangente à la courbe Γ au point t et il est noté $p(t)$. On peut parfois déterminer $p(t)$ même si $x'(t) = 0 = y'(t)$.

La courbe Γ admet un point d'inflexion en tout point $M(t)$ où la dérivée de la pente s'annule et change de signe.
On a $p'(t) = \dfrac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2}$ (Attention, en général $p'(t) \neq \dfrac{y''(t)}{x''(t)}$) .

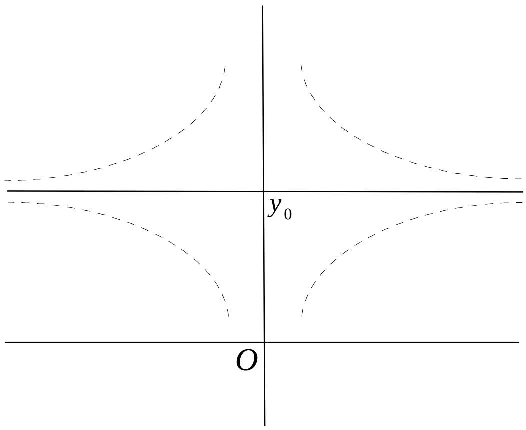
2.4 Branches infinies

Soit Γ une courbe paramétrée définie par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t))$.
On dit que Γ admet une branche infinie lorsque t tend vers t_0 (t_0 fini ou non) si $\lim\limits_{t \to t_0} \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| = +\infty$ c'est-à-dire si au moins une des coordonnées $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0.
Les différents cas sont alors les suivants :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 (\in \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à Γ.

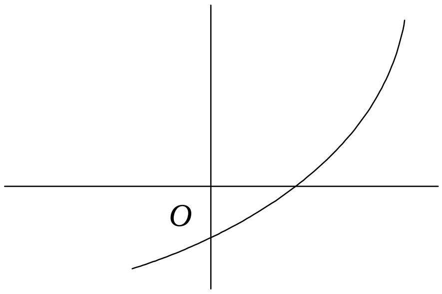


- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 (\in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à Γ.

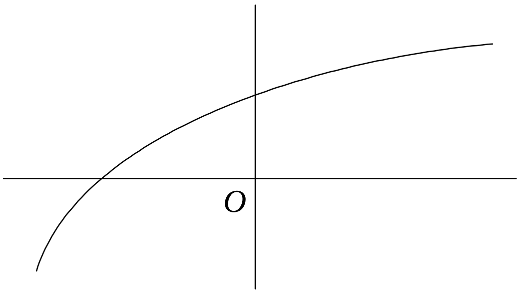


- Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ alors on étudie $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

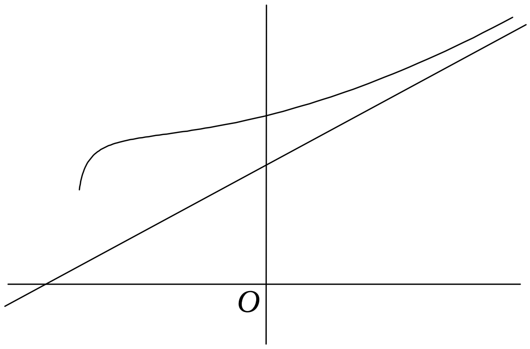
  - Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors Γ admet une branche parabolique dans la direction Oy.



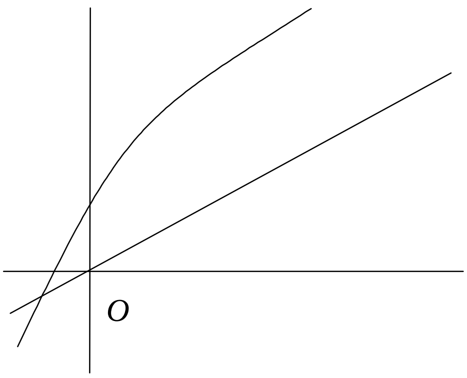
  - Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors Γ admet une branche parabolique dans la direction Ox.



  - Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a\,(\in \mathbb{R}^*)$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b\,(\in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Γ.



  - Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a\,(\in \mathbb{R}^*)$ et $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$ alors Γ admet une branche parabolique de pente a.



  - Si $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$ et si $y(t) - ax(t)$ n'a pas de limite alors on ne peut rien dire.
  - Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ n'a pas de limite alors on ne peut rien dire.

Exemple

Etude des branches infinies de la courbe paramétrée Γ définie par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} - t \\ y(t) = \dfrac{t+2}{t(1-t)} \end{cases}$

Nous avons des branches infinies lorsque t tend vers 0, 1 ou ±∞.

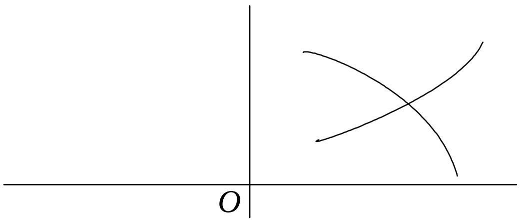
- $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
  $\lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$.
  Donc la droite d'équation $y = 0$ (c'est à dire l'axe des abscisses) est asymptote à Γ.

- $\lim_{t\to 1} x(t) = 0$ et $\lim_{t\to 1} y(t) = \pm\infty$.
  Donc la droite d'équation $x = 0$ (c'est à dire l'axe des ordonnées) est asymptote à Γ.

- $\lim_{t\to 0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to 0} y(t) = \pm\infty$.
  $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t+2}{t(1-t)} \times \dfrac{t}{1-t^2} = \dfrac{t+2}{(1-t)(1-t^2)}$. Donc $\lim_{t\to 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 2$.
  $y(t) - 2x(t) = \dfrac{t+2}{t(1-t)} - 2 \times \dfrac{1-t^2}{t} = \dfrac{t+2-2(1-t-t^2+t^3)}{t(1-t)} = \dfrac{t(3+2t-2t^2)}{t(1-t)} = \dfrac{(3+2t-2t^2)}{(1-t)}$
  D'où $\lim_{t\to 0} y(t) - 2x(t) = 3$.
  Alors la droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à Γ.

2.5 Points doubles et points multiples

Il arrive que pour deux (ou plus) valeurs distincts de t les points obtenus d'une courbe paramétrée soient les mêmes.



Soit Γ une courbe paramétrée définie par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t))$.

Pour déterminer l'existence et la valeur de ces points multiples, on résout le système $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$.

En pratique, on prend plutôt a et b ou r et s à la place de t_1 et t_2.

Exemple

On cherche les points doubles de Γ la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$ par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t-1}{t^2-t-2} \\ y(t) = \dfrac{t+1}{t^2+2} \end{cases}$.

On doit résoudre : $\begin{cases} \dfrac{2a-1}{a^2-a-2} = \dfrac{2b-1}{b^2-b-2} \\ \dfrac{a+1}{a^2+2} = \dfrac{b+1}{b^2+2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab^2 - 2ab - 4a - b^2 + b + 2 = 2ba^2 - 2ab - 4b - a^2 + a + 2 \\ ab^2 + 2a + b^2 + 2 = ba^2 + 2b + a^2 + 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2ab^2 - 2ba^2 - 5a + 5b - b^2 + a^2 = 0 \\ ab^2 - ba^2 + 2a - 2b + b^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2ab(b-a) + 5(b-a) - (b+a)(b-a) = 0 \\ ab(b-a) - 2(b-a) + (b-a)(b+a) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2ab + 5 - (b+a) = 0 \\ ab - 2 + (b+a) = 0 \end{cases}$$

En posant $S = a + b$ et $P = ab$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2P + 5 - S = 0 \\ P - 2 + S = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où } P = -1 \text{ et } S = 3.$$

Donc a et b sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$ c'est-à-dire $X^2 - 3X - 1 = 0$

$\Delta = 13$, $X_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

D'où $\{a,b\} = \{X_1,X_2\}$.

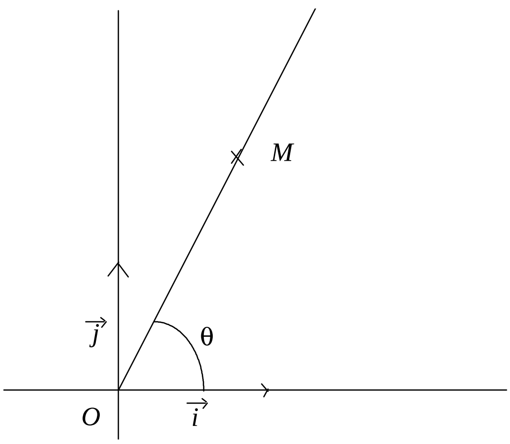
2.6 Plan d'étude

Soit Γ une courbe paramétrée définie par la donnée de $\overrightarrow{OM}(t) = (x(t),y(t)) = \vec{F}(t)$.

- Ensemble de définition de x et y.
- Périodicité, parité et autres symétries possibles.
- Détermination de $\vec{F}'(t)$.
- Signe de x' et de y'.
- Tableau de variations.
- Branches infinies.
- Etude du comportement aux points stationnaires
- Quelques points $\rightarrow$ courbe.
- Points doubles.

3. Courbes en coordonnées polaires

3.1 Coordonnées polaires d'un point dans le plan



On considère $\mathscr{P}$ le plan euclidien muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit M un point de $\mathscr{P}$ diffèrent de O.

On peut connaître la position de M avec la donnée d'une mesure θ de l'angle de droite $(Ox,(OM))$ et la donnée de ρ la valeur algébrique $\overline{OM}$.

Le couple (ρ,θ) forme des coordonnées polaires de M.

Remarques

- Un angle de droite est défini à π près.
- Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires (ρ,θ) d'un point M. Car il en est de même pour tous les couples $(\rho,\theta + 2k\pi)$ et $(-\rho,\theta + \pi + 2k\pi)$ où $k\in\mathbb{Z}$
  C'est-à-dire, plus simplement, $((-1)^k\rho,\theta + k\pi)$ où $k\in\mathbb{Z}$.
- O est repéré par $\rho = 0$ et θ quelconque.
- Ne pas confondre avec l'image d'un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est positif.
- Le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes se fait grace aux formules:
  $x(t) = \rho(t) \cos t$
  $y(t) = \rho(t) \sin t$

3.2 Courbes planes en coordonnées polaires

Nous allons nous intéresser à la construction des courbes planes dont les coordonnées polaires des points sont liées par une relation du type $\rho = f(\theta)$ où f est une fonction numérique réelle ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) dérivable autant de fois que nécessaire.

Remarque

On pourrait revenir aux courbes paramétrée classiques grâce aux formules : $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$.

3.2.1 Courbes particulières

- Droite passant par O

  Equation : $\theta = \theta_0 + k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

- Droite ne passant pas par O

  $ax + by + c = 0$ avec $c \neq 0$ d'où $\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y = -1$.
  Or $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ donc $\frac{a}{c}\rho\cos\theta + \frac{b}{c}\rho\sin\theta = -1$.

  On pose $\alpha = -\frac{a}{c}$ et $\beta = -\frac{b}{c}$
  Equation : $\rho = \dfrac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}$

- Cercle de centre O et de rayon a

  Equation : $\rho = -a$ ou $\rho = a$

- Cercle passant par O

  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ avec $a^2 + b^2 = r^2$ car O est un point du cercle.
  Donc $x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$ or $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$
  donc $(\rho\cos\theta)^2 - 2a\rho\cos\theta + (\rho\sin\theta)^2 - 2b\rho\sin\theta = 0$
  $\rho^2 - 2\rho(a\cos\theta + b\sin\theta) = 0$
  $\rho(\rho - 2(a\cos\theta + b\sin\theta)) = 0$
  # Si $\rho = 0$, on obtient le cercle réduit au point O.

\#	Si $\rho - 2(a\cos\theta + b\sin\theta) = 0$, on pose $\alpha = 2a$ et $\beta = 2b$.
Equation : $\rho = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$
(Cette équation intègre le cas $\rho = 0$).

3.2.2 Domaine d'étude

Soit Γ la courbe plane d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ où f est une fonction numérique réelle ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). L'ensemble de définition D_Γ de Γ est celui de f. Comme pour les courbes paramétrées, on détermine d'abord un domaine de représentation propre c'est-à-dire une partie D_1 de D_Γ telle que Γ soit décrite entièrement une fois et une seule lorsque t varie sur D_1.

Périodicité

On suppose que : D_Γ est stable par la translation de T.
$f(\theta + T) = f(\theta)$ c'est à dire $\rho(\theta + T) = \rho(\theta)$ pour tout θ de D_Γ.

- Si $T = 2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}^*$, alors $M(\theta + T) = M(\theta)$ et on peut réduire l'intervalle d'étude au moins à l'intersection de D_Γ et d'un intervalle de longueur T.
- Si $T = (2k + 1)\pi$ où $k\in\mathbb{Z}^*$, alors $M(\theta + T) = M(\theta)$ sont symétriques par rapport à O. On a une représentation propre sur un intervalle de longueur $2T$. Mais on peut réduire l'intervalle d'étude au moins à l'intersection de D_Γ et d'un intervalle de longueur T à cause de la symétrie.
- Si $T = 2\pi / k$ où $k\in\mathbb{Z}^*$, alors on peut réduire l'intervalle d'étude au moins à l'intersection de D_Γ et d'un intervalle de longueur T et on détermine le point correspondant à $\theta + T$ à partir de celui correspondant à θ par une rotation d'angle T.

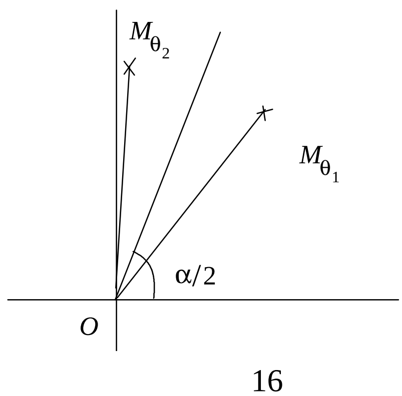
Autre cas : Si $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ alors on peut réduire l'intervalle d'étude au moins à l'intersection de D_Γ et d'un intervalle de longueur π car les points de coordonnées (ρ,θ) et $(-\rho,\theta + \pi)$ sont les mêmes.

Parité

On suppose que l'on a réduit l'ensemble d'étude d'une courbe Γ à D_1.
On peut réduire encore le domaine d'étude si f possède des propriétés particulières :
Si f est paire, alors Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et on peut réduire à $D_1 \cap \mathbb{R}^+$.
Si f est impaire, alors Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, de même, on peut réduire l'étude à $D_1 \cap \mathbb{R}^+$.

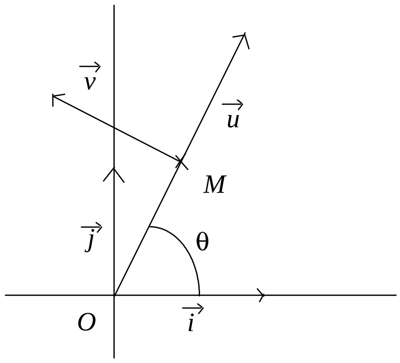
Autres cas

- Si D_1 est symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et si $f(\pi-\theta) = f(\theta)$, alors les points $M(\pi-\theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axes Oy.
On peut réduire à $D_1 \cap \left]-\infty; \frac{\pi}{2}\right[$ ou à $D_1 \cap \left]\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$.
- De façon plus générale, si la courbe paramétrée Γ admet une représentation propre sur un intervalle D_1 symétrique par rapport à $\frac{\alpha}{2}$ et si $\forall\theta_1,\theta_2\in D_1$ / $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$, on a $f(\theta_2) = f(\theta_1)$,alors il suffit d'étudier Γ sur $D_1 \cap \left]-\infty; \frac{\alpha}{2}\right[$ ou à $D_1 \cap \left]\frac{\alpha}{2}; +\infty\right[$ la deuxième partie de la courbe s'obtenant par la symétrie d'axe la droite d'axe polaire $\frac{\alpha}{2}$.
En particulier, si $D_1 = [0,\alpha]$, on peut réduire à $\left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$ ou à $\left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$.



3.2.3 Etude locale au voisinage d'un point

Propriété



Soit $M(\theta)$ un point d'une courbe Γ définie par $(\theta,\rho(\theta))$.
Le vecteur $\vec{u}(\cos\theta,\sin\theta)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormal est un vecteur unitaire.
$\frac{du}{d\theta} = (-\sin\theta)\vec{\imath} + (\cos\theta)\vec{\jmath} = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}))\vec{\imath} + (\sin(\theta + \frac{\pi}{2}))\vec{\jmath} = \vec{v}$
$(M(\theta),\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan dit repère du mobile.
On a $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$ ou, plus précisément, $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$.
D'où $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta) = \rho'\vec{u} + \rho\vec{v}$.

Remarques

- Si $\rho(\theta) \neq 0$, c'est-à-dire si $M(\theta) \neq O$, alors $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \neq \vec{0}$.
  Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ est le vecteur directeur de la tangente en M en Γ.
  Le point M est soit un point ordinaire soit un point d'inflexion.
  Si $\rho'(\theta) \neq 0$, la pente de la tangente dans le repère $(M(\theta),\vec{u},\vec{v})$ est $\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.
- Si $\rho(\theta) = 0$ et $\rho'(\theta) \neq 0$, on a $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'\vec{u}$.
  La tangente en $M(\theta) = O$ fait un angle θ avec l'axe Ox.
- Si $\rho(\theta) = 0$ et $\rho'(\theta) = 0$, on a $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \vec{0}$ et $M(\theta) = O$ est un point stationnaire.
  On trouve de même que la tangente en $M(\theta) = O$ fait un angle θ avec l'axe Ox.

3.2.4 Etude de la concavité

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta)$$
$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} = \rho''(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho'(\theta)\vec{v}(\theta) + \rho'(\theta)\vec{v}(\theta) - \rho(\theta)\vec{u}(\theta) = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\vec{u} + 2\rho'(\theta)\vec{v}$$
$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}\right) = \begin{vmatrix} \rho' & \rho''-\rho \\ \rho & 2\rho' \end{vmatrix} = \rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''$$

(((((Si $\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho'' > 0$, alors la concavité est tournée vers le pôle.))))))
(((((Si $\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho'' < 0$, alors la concavité est opposée au pôle.))))))
Si $\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho'' = 0$ et s'il y a changement de signe alors le point M est un point d'inflexion.

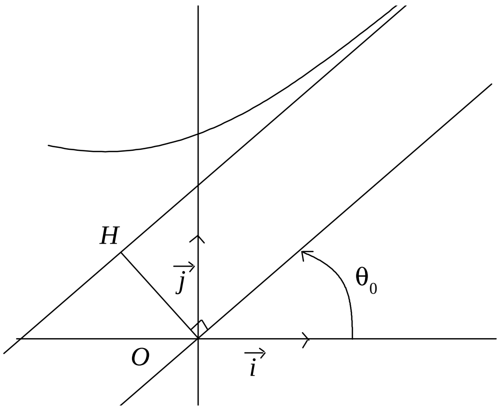
3.2.5 Branches infinies

Soit Γ la courbe en coordonnées polaires définie par $(\theta,\rho(\theta))$ dans une repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- Si $\rho(\theta) \to \pm\infty$ quand $\theta \to \pm\infty$, alors Γ est une spirale qui s'éloigne de O tout en tournant.
- Si $\rho(\theta) \to 0$ quand $\theta \to \pm\infty$, alors Γ est une spirale qui converge vers O dit point asymptote.
- Si $\rho(\theta) \to a$ ($\in\mathbb{R}$) quand $\theta \to \pm\infty$, alors Γ est une spirale qui s'enroule autour du cercle de centre O et de rayon $|a|$.

- Si $\rho(\theta) \to \pm\infty$ quand $\theta \to \theta_0$,

  - Si $\rho \sin(\theta - \theta_0) \to d$ (fini) lorsque $\theta \to \theta_0$ alors la droite passant par le point H de coordonnées polaires $(\theta_0 + \frac{\pi}{2}, d)$ et d'angle polaire θ_0 est asymptote.



La position de la courbe par rapport à la tangente dépend du signe de $\rho \sin(\theta - \theta_0) - d$.
Si $\rho \sin(\theta - \theta_0) \to d^+$ alors la courbe est au dessus de la tangente (relativement au repère local).
Si $\rho \sin(\theta - \theta_0) \to d^-$ alors la courbe est au dessous de la tangente (relativement au repère local).

  - Si $\rho \sin(\theta - \theta_0) \to \pm\infty$ lorsque $\theta \to \theta_0$ la courbe admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'angle θ_0.
  - Si $\rho \sin(\theta - \theta_0)$ n'a aucune limite lorsque $\theta \to \theta_0$, une étude spécifique est nécessaire.

Exemple

Soit Γ la courbe paramétrée en coordonnées polaires définie par $\rho = \dfrac{1}{1 - 2\sin\theta}$.
Un étude préalable montre que l'on peut étudier la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap D_\Gamma$.
On a $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{6}} \rho = \pm\infty$.
On pose $t = \theta - \frac{\pi}{6}$.
On a $\theta = t + \frac{\pi}{6}$ et θ proche de $\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t$ proche de 0.
On a $\dfrac{1}{1 - 2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)} \times \sin t = \dfrac{\sin t}{1 - \sqrt{3}\,\sin t - \cos t}$.

$\sin t \simeq t$ en 0.
$1 - \sqrt{3}\,\sin t - \cos t \simeq -\sqrt{3}\,t$ en 0 (en utilisant un développement limité).

D'où $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{1 - \sqrt{3}\,\sin t - \cos t} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
La droite passant par le point H de coordonnées polaires $(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ et d'angle polaire $\frac{\pi}{6}$ est asymptote.

3.2.6 Points doubles

- Le pôle est un point multiple si $\rho(\theta)$ s'annule pour plusieurs valeurs de θ.
- Un point autre que le pôle d'angle polaire θ_0 est un point multiple d'une courbe définie par $\rho = f(\theta)$ si $f(\theta_0 + 2k\pi) = f(\theta_0)$ ou si $f(\theta_0 + (2k+1)\pi) = -f(\theta_0)$ pour un certain entier k.
  Situation que l'on peut résumer par $f(\theta_0 + k\pi) = (-1)^k f(\theta_0)$.