Géométrie

I. Introduction et historique

Ce que nous n'allons pas faire :

- De la géométrie vectorielle ou de géométrie analytique (bijection du plan vectoriel avec $\mathbb{R}^2$).

Ce que nous allons faire :

- Redéfinir les concepts de géométrie euclidienne.
- Revoir les théorèmes classiques de la géométrie euclidienne.
- Etudier des problèmes de constructibilité à la règle et au compas.
- Revoir les polygones réguliers et leur aire.
- Revoir les polyèdres réguliers et leur volume.

Le nom grecque γεωμετρια est composé de :

γεω (lire "guéo") de "η γη" (lire "ê guê") qui signifie "la terre"
μετρια (lire "métria") qui signifie "mesure".

La géométrie et les nombres sont les fondements des mathématiques.

L'origine de la géométrie remonte à l'antiquité. Les babyloniens, les égyptiens avaient déjà des notions avancées dans celle-ci. Ses applications architecturales ainsi que dans la mesure des surfaces étaient nécessaires dans de nombreux domaines. Néanmoins, ce sont les grecs qui donnèrent les lettres d'or à la géométrie : le théorème de Pythagore (connu par d'autres mais pas nécessairement avec une démonstration), le théorème de Thalès (sa légende : mesure de la hauteur des pyramides!) et, plus généralement, la géométrie euclidienne (Euclide).

Question : Comment un maçon peut-il faire pour construire une maison à base rectangulaire alors qu'il ne dispose que d'une corde?
Réponse : Les diagonales d'un rectangle ont même longueur.
On peut aussi utiliser des mesures particulières des longueurs des cotés d'un triangle : 3 + 4 + 5 (= 12) ainsi que leurs multiples : la corde à treize noeuds (donc 12 intervalles) était dit-on encore utilisée au moyen âge!

Au début des mathématiques, les problèmes avaient souvent leur interprétation géométrique. Ainsi l'utilisation des concepts et de la représentation géométrique servaient à leur résolution.

Même les nombres avaient leur classification géométrique : les nombres triangulaires, les nombres carrés.

Enfin, certains nombres irrationnels peuvent être vus comme la diagonale d'un carré $\sqrt{p}$ où p est un entier premier par exemple.

Remarquons enfin, qu'il n'y a pas eu d'évolution notoire de l'écriture géométrique depuis les grecs.

II. Géométrie plane euclidienne

La géométrie euclidienne date des environs de 300 ans avant J.C.
Dans le traité "Eléments de géométrie", de l'époque, on peut trouver, à partir d'un certain nombre d'axiomes (appelés postulats) les fondements d'une géométrie.

1. Premiers axiomes sur le plan et les droites

AP1 : Existence d'un ensemble appelé plan (notion intuitive - modèle idéal) dont les éléments sont appelés points.

Un plan admet des parties (sous-ensembles) particulières appelées droites qui vérifient les axiomes suivants :

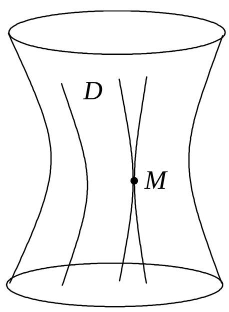
AD1 : Deux points différents du plan appartiennent à une et une seule droite.
AD2 : Toute droite contient au moins deux points.
AD3 : Il existe au moins trois points qui n'appartiennent pas tous les trois à la même droite.

Lorsque trois points appartiennent à la même droite, on dit qu'ils sont alignés.
De la droite qui contient deux points, on dit qu'elle passe par ces points.
La droite passant par les points A et B est notée (AB).
Lorsqu'un point appartient à une droite, on dit aussi qu'il est situé sur cette droite.

Soient D_1 et D_2 deux droites.
Si D_1 et D_2 ont deux points communs, de l'axiome AD1, on tire que $D_1 = D_2$. On dit alors qu'elles sont confondues.
Si D_1 et D_2 sont différentes, elles n'ont donc que 0 ou 1 point commun.
Si D_1 et D_2 ont un seul point commun, on dit qu'elles sont sécantes.
Si D_1 et D_2 n'ont aucun point commun, on dit qu'elles sont parallèles.

Postulat d'Euclide : Par un point M non situé sur une droite D passe une et une seule parallèle à D.

Attention, ce postulat est faux pour les géométries non euclidiennes :



Autres propriétés :

\# Corollaire au postulat d'Euclide :
Soient A, B et C trois points du plan et D une droite.
Si les droites (AB) et (AC) sont parallèles à D alors A, B et C sont alignés.
\# Direction = classe d'équivalence = une droite et toutes ses parallèles. En particulier :
Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
On intègre ici confondues à parallèles.
\# Si deux droites sont parallèles, alors toute droite sécante à l'une est aussi sécante à l'autre.

2. Convexité

Soient A et B deux points différents du plan.

Nous admettrons la notion intuitive "être entre".

Cette relation permet de définir le segment $[AB]$ comme l'ensemble des points de la droite (AB) qui sont entre A et B.

On peut aussi définir la demi droite $[A,B)$ comme la réunion de l'intervalle $[A,B]$ et de l'ensemble des points M tels que B est entre A et M.

Soient D une droite et deux points A et B n'appartenant pas à D.
On s'intéresse à la position de A et B par rapport à D.
L'intersection de la droite (AB) et de la droite D est vide ou réduit à un point.

Si l'intersection est vide, on dit que les deux points A et B sont dans le même demi-plan de frontière D.
Il en est de même si le point d'intersection de (AB) et de D n'est pas entre A et B.
Dans le cas contraire, A et B sont dans deux demi-plans différents de frontière D.

Une partie F du plan sera dit convexe si et seulement si quelques que soient les points A et B de F, l'intervalle $[A,B]$ est inclus dans F.

Question : Un demi-plan est-il convexe? Justification : Une autre façon de caractériser les demi-plans est de remarquer que deux points A et B sont dans le même demi-plan si et seulement si aucun point du segment $[AB]$ n'appartient à D.

Question : Montrer que l'intersection de deux ensembles convexes est convexe.

Question : Donner des exemples d'ensembles convexes.

Question : La réunion de deux ensembles convexes est-elle convexe? Justifier votre réponse.

Un triangle est la donnée de trois points non alignés (tous les triangles de ce cours seront non-aplatis).
Si les points sont A, B et C, le triangle est noté ABC.
Les bords ou côtés du triangle ABC sont les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

Par abus, c'est l'ensemble des bords du triangle qui est finalement appelé le triangle ABC.

Question : L'intérieur du triangle est-il une partie convexe? Justifier votre réponse.

3. Distance et mesure

La notion de mesure est à dissocier de la notion de longueur.
Tout segment possède une seule longueur mais la mesure de cette longueur peut varier.
Plus exactement, la mesure d'un segment est la distance entre les sommets du segment.

Une distance d est une application des couples de points du plan dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie :
i) $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
ii) $d(A,B) = d(B,A)$
iii) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ inégalité triangulaire

Exemples de distance : Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

\# $d_1(M,M') = ((x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{1/2}$

d_1 est appelée la distance euclidienne.

\# $d_2(M,M') = |x' - x| + |y' - y|$

\# $d_3(M,M') = \sup(|x' - x|,|y' - y|)$

Question : Si, dans le plan euclidien, on prend comme distance la distance euclidienne, quand a-t-on l'égalité dans *iii)*?

Question : Peut-on généraliser ce résultat?

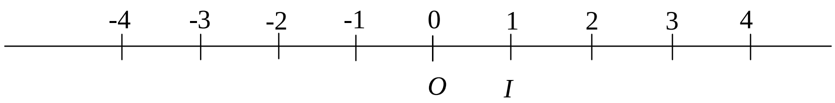
Une distance étant choisie, nous notons AB la distance de A à B c'est-à-dire la longueur du segment $[AB]$.

Etant donnés un point O et un réel positif r, le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = r$.

Question : Déterminer les cercles de centre O et de rayon 1 en utilisant successivement les distances d_1, d_2 et d_3.

4. Mesure algébrique : orientation et droite graduée

Soit O un point d'une droite D.
On admet que le cercle de centre O et de rayon 1 rencontre D en deux points I_1 et I_2.
Soit I l'un de ces deux points (pour choisir un sens positif). On peut définir une bijection entre $\mathbb{R}$ et D : à chaque point M de la demi-droite $[OI)$, on associe le réel positif OM et, à chaque point M de l'autre demi-droite, on associe le réel négatif $-OM$.
Le réel correspondant à un point ainsi obtenu est appelé l'abscisse de ce point.
On obtient ainsi ce que l'on appelle une droite graduée :



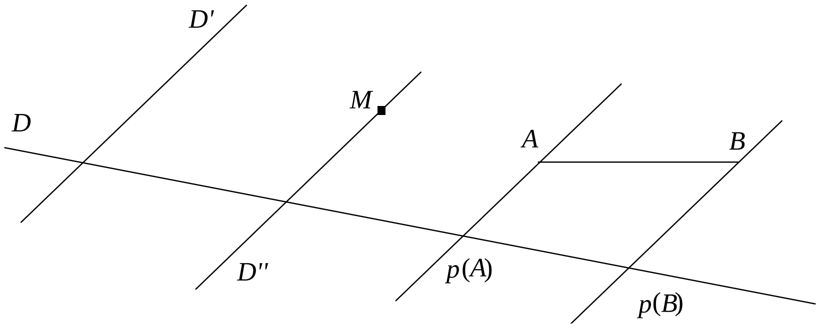
Soit un point M de D, la mesure algébrique $\overline{OM}$ est l'abscisse du point M.
Soient A et B deux points de D. On définit la mesure algébrique $\overline{AB}$ par : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.
Plus simplement, $\overline{AB}$ sera égal à la distance AB si la direction A vers B correspond au sens positif choisi et à son opposé dans le cas contraire.

5. Projection

Soient D et D' deux droites sécantes.

Soit M un point du plan et soit D'' la parallèle à D' qui passe par M (cela peut être D').
On appelle projeté de M sur D le point d'intersection de D et D''.

Soient A et B deux points du plan. Soient $p(A)$ et $p(B)$ les projetés respectifs de A et B sur D parallèlement à D'. La projection du segment $[A,B]$ est le segment $[p(A),p(B)]$.



III. Les angles

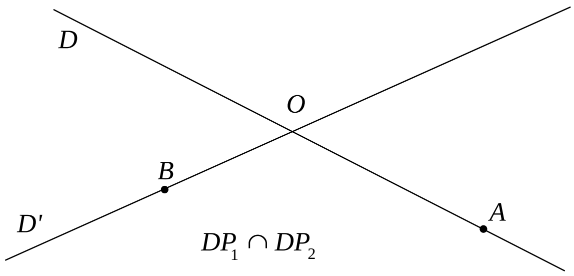
1. Angle

Considérons dans un premier temps deux droites D et D' sécantes (non confondues) en un point O. Ces droites définissent quatre parties du plan qui sont les intersections des demi-plans.

Soient maintenant A un point de D et B un point de D' différents tous les deux de O.
Soient DP_1 et DP_1' les demi-plans de frontière D, DP_1 contenant B et soient DP_2 et DP_2' les demi-plans de frontière D', DP_2 contenant A.

On appelle secteur angulaire saillant AOB (ou plus simplement angle AOB) et on note $\widehat{AOB}$ la partie du plan obtenue par intersection de DP_1 et DP_2.

On appelle secteur angulaire rentrant AOB la partie du plan obtenue par réunion de DP_1' et DP_2'.



Si les droites D et D' sont confondues, soient O, A et B trois points de D. Le secteur saillant $\widehat{AOB}$ est la demi-droite $[OA)$ si B appartient à $[OA)$. Sinon, le secteur saillant est l'un des demi-plans de frontière D. Il y a, dans ce dernier cas, égalité entre le secteur saillant et le secteur rentrant.

2. Mesure d'un angle

Nous admettrons que le périmètre d'un cercle de rayon 1 est 2π.

Soient $[OA)$ et $[OB)$ deux demi-droites et soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
Soit A' le point d'intersection de $[OA)$ et de $\mathscr{C}$ et soit B' le point d'intersection de $[OB)$ et de $\mathscr{C}$.
On appelle mesure du secteur angulaire AOB la longueur de l'arc d'extrémités A et B.

Si le secteur angulaire est saillant, sa mesure est inférieure à π. Si le secteur angulaire est rentrant, sa mesure est supérieure à π. On parlera d'angle plat lorsque la mesure est exactement π.

Un angle droit est un angle dont la mesure est $\pi / 2$.
Un angle est dit aigu si sa mesure est comprise entre 0 et $\pi / 2$.
Un angle est dit obtu si sa mesure est comprise entre $\pi / 2$ et π.

Deux angles sont dit supplémentaires si la somme de leurs mesures vaut π.
Deux angles sont dit complémentaires si la somme de leurs mesures vaut $\pi / 2$.

Par abus, on identifiera un angle et sa mesure.

Le degré ($180° = \pi$ radians) est une autre unité de mesure d'un secteur angulaire.

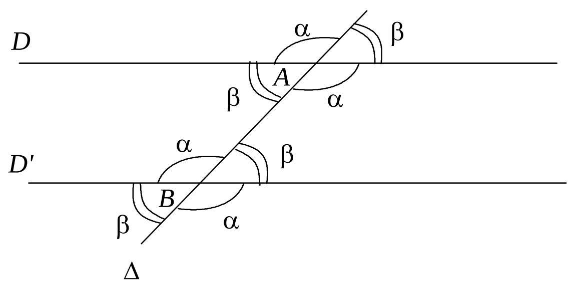
3. Angles et droites

Deux droites sont dites perpendiculaires (cas particulier d'orthogonales de l'espace) si les angles qu'elle définissent sont tous de mesure $\pi / 2$.

Lorsque deux droites D et D' sont perpendiculaires, la projection sur D parallèlement à D' est appelée projection orthogonale.

Soit A un point, la distance de A à une droite D est la distance AA' où A' est le projeté orthogonal de A sur D.

Soient D et D' deux droites parallèles et soit Δ une droite sécante avec D et D' respectivement aux points A et B.

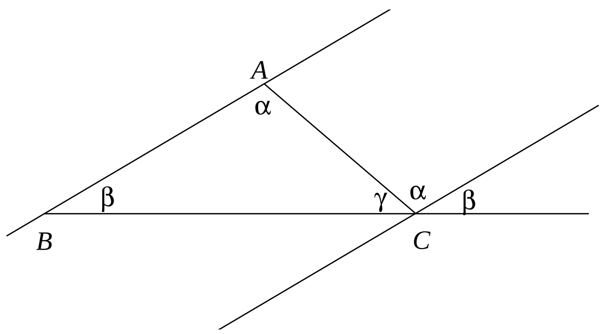


Les angles entre les demi-droites de D et D' issues de A et B et la droite Δ sont soit supplémentaires, soit égaux (ce sont des angles alternes-internes-externes).

Réciproquement, si deux droites forment les mêmes angles alternes-internes (ou externes) avec une même troisième alors elles sont parallèles.

Conséquence

La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π.



Corollaire

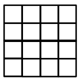
Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

IV. Aires

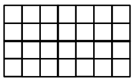
L'aire ou superficie (terme utilisé plus souvent dans les domaines non-mathématiques) est une mesure de surface. Par abus, on parle de surface au lieu de l'aire d'une surface (et ce n'est pas bien....).
L'aire des surfaces est déterminée en supposant vérifiée la propriété d'additivité : si on coupe une surface en 2, la somme des aires des deux parties est égale à l'aire totale.
On peut obtenir l'aire d'une surface en postulant que l'aire d'un carré de côté 1 est égale à 1 puis en effectuant des découpages.

Quelques valeurs connues et admises :

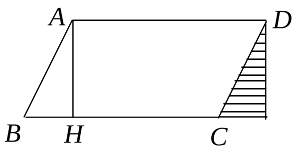
L'aire d'un carré de côté a est a^2.



L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l est $L \times l$.

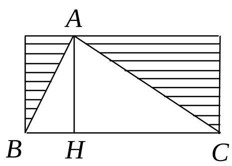


L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ s'obtient grâce à la hauteur issue de l'un de ses sommets.



$a(ABCD) = AH \times BC$

L'aire d'un triangle ABC s'obtient aussi à partir de la hauteur issue d'un sommet.



$a(ABC) = \dfrac{AH \times BC}{2}$.

L'aire d'un cercle de rayon r est πr^2.

Quelques résultats sur des surfaces en trois dimensions :

L'aire de la surface d'un cube de côté a est $6a^2$.

L'aire de la surface d'un parallélépipède rectangle de côtés a, b et c est $2(ab + ac + bc)$

L'aire de la surface d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est $2\pi r h$.

L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$.

V. Le théorème de Pythagore

Les angles saillants d'un triangle ABC sont notés $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

Un triangle ABC est dit rectangle en A si et seulement si l'angle $\hat{A}$ est droit.

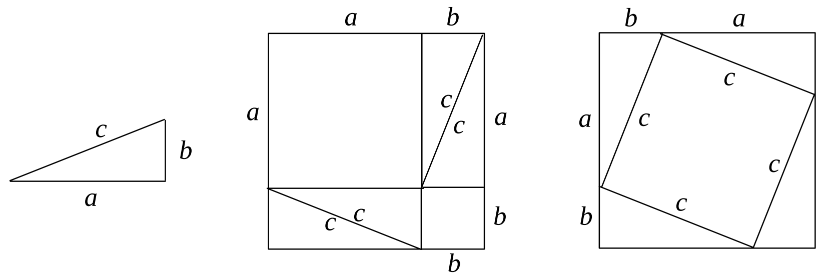
Théorème

Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque

Soit ABC un triangle. Si on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est rectangle en A.

Démonstration

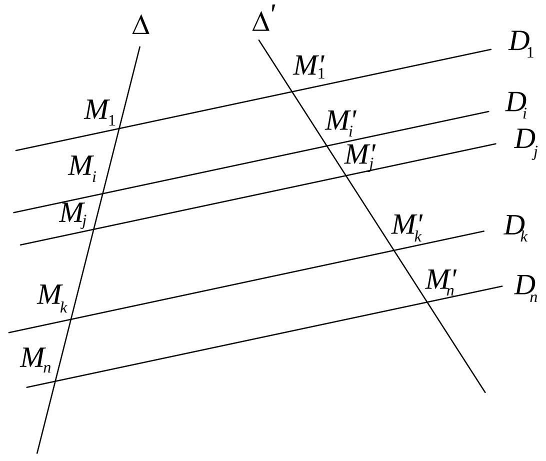


VI. Le théorème de Thalès

Théorème

Soient D_1, D_2, ..., D_n n (> 2) droites parallèles.
Soient Δ et Δ' deux droites sécantes non parallèles aux droites D_i.
Pour tout entier i compris entre 1 et n, soit M_i le point d'intersection de D_i et Δ et soit M'_i le point d'intersection de D_i et Δ'.
$\forall 1 \leq i,j,k \leq n$, avec $i \neq k$, on a : $\dfrac{M_iM_j}{M_iM_k} = \dfrac{M'_iM'_j}{M'_iM'_k}$.

Plus précisément, après avoir choisi un sens positif sur Δ et Δ' :
$\forall 1 \leq i,j,k \leq n$, avec $i \neq k$, on a : $\dfrac{\overline{M_iM_j}}{\overline{M_iM_k}} = \dfrac{\overline{M'_iM'_j}}{\overline{M'_iM'_k}}$.

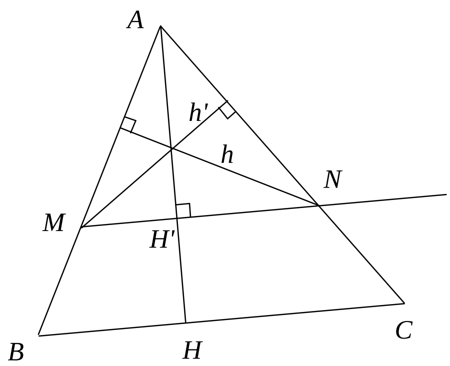


On peut démontrer ce théorème en utilisant la propriété suivante :

Corollaire

Soit ABC un triangle.
Soit M un point de $[AB]$ et soit $\mathscr{D}$ la droite passant par M et parallèle à (BC).
Soit N le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $[AC]$.
On a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.
Lorsque ce rapport est égale à $\dfrac{1}{2}$, on parle de la droite des milieux.

Démonstration du corollaire



Soit H le point de (BC) tel que (AH) soit la hauteur de ABC issue de A.
Soit H' le point de (MN) tel que (AH') soit la hauteur de AMN issue de A.

$a(BNC) = a(BMC)$ car même longueur pour la base $[BC]$ et même longueur de hauteur qui vaut HH'.

On a $\quad a(ABN) = a(ABC) - a(BNC)$
et $\quad a(ACM) = a(ABC) - a(BMC)$.
Donc $a(ABN) = a(ACM)$.

Soit h la longueur de la hauteur issue de N des triangles ABN et AMN.
$a(ABN) = \dfrac{1}{2} \times h \times AB$ et $a(AMN) = \dfrac{1}{2} \times h \times AM$

Soit h' la longueur de la hauteur issue de M des triangles ACM et AMN.
$a(ACM) = \dfrac{1}{2} \times h' \times AC$ et $a(AMN) = \dfrac{1}{2} \times h' \times AN$

D'où $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{a(AMN)}{a(ABN)} = \dfrac{a(AMN)}{a(ACM)} = \dfrac{AN}{AC}$.

Remarquons que l'on peut appliquer la propriété dans les triangles ABH et AMH'.
On a donc : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$.
Ou encore si $AB = kAM$ alors $AH = kAH'$.
On a donc $AB^2 = k^2 AM^2 = k^2(AH'^2 + MH'^2) = (kAH')^2 + (kMH')^2 = AH^2 + (kMH')^2$
Mais, on a aussi $AB^2 = AH^2 + BH^2$.
Donc $BH = kMH'$.

En faisant de même dans les triangles AHC et $AH'N$, on obtient $CH = kNH'$.

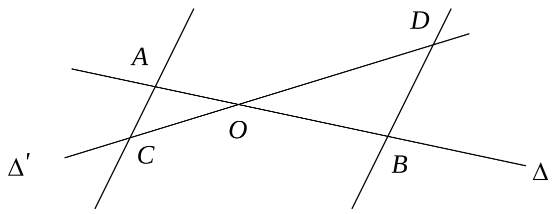
D'où $BC = BH + CH = kMH' + kNH' = k(MH' + NH') = kMN$ c'est-à-dire $\dfrac{AM}{BC} = \dfrac{MN}{BC}$.

Réciproque

Soit ABC un triangle. Soit M un point de $[AB]$ et soit N un point de $[AC]$.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors (MN) est parallèle à (BC).

Corollaire

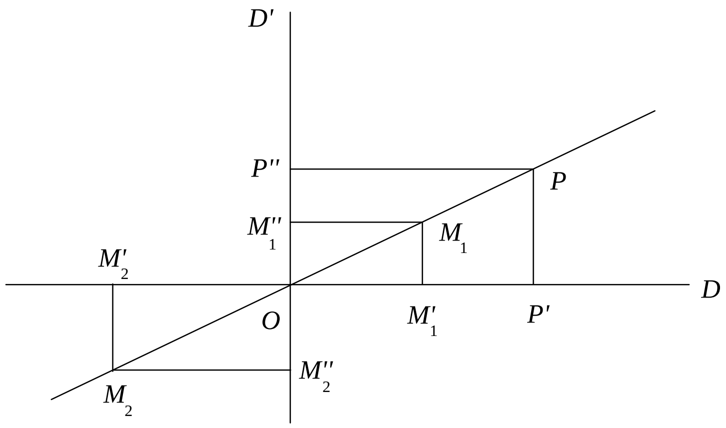
Soient Δ et Δ' deux droites sécantes en un point O.
Soient A et B deux points de Δ sur des demi-droites issues de O différentes.
Soient C et D deux points de Δ' sur des demi-droites issues de O différentes.
Si (AC) et (BD) sont parallèles alors $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$



VII. Trigonométrie

1. Projection

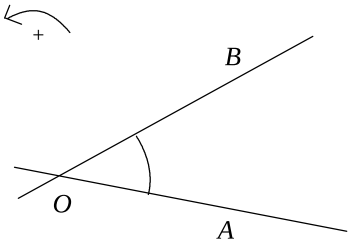
Soient D et D' deux droites orthogonales se coupant en un point O.
Soit P un point du plan.
Pour tout point M du plan, on note M' son projeté orthogonal sur D et M'' son projeté orthogonal sur D'.



Pour tout point M de (OP) le rapport $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}$ est invariant (égal à $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$). Il en est de même de $\frac{\overline{OM''}}{\overline{OM}}$.
Si M_1 et M_2 sont deux points de la droite (OP) dans deux demi-droites issues de O différentes alors les rapports $\frac{\overline{OM'_1}}{\overline{OM_1}}$ et $\frac{\overline{OM'_2}}{\overline{OM_2}}$ sont opposés.
Il en est de même des rapports $\frac{\overline{OM''_1}}{\overline{OM_1}}$ et $\frac{\overline{OM''_2}}{\overline{OM_2}}$.

2. Angles orientés

On adopte une orientation du plan c'est-à-dire un sens positif de mesure des angles.



On a donc $\text{mes}([OA),[OB)) = -\ \text{mes}([OB),[OA))$.
Autrement dit : $\text{mes}\,\widehat{AOB} = -\ \text{mes}\ \widehat{BOA}$.

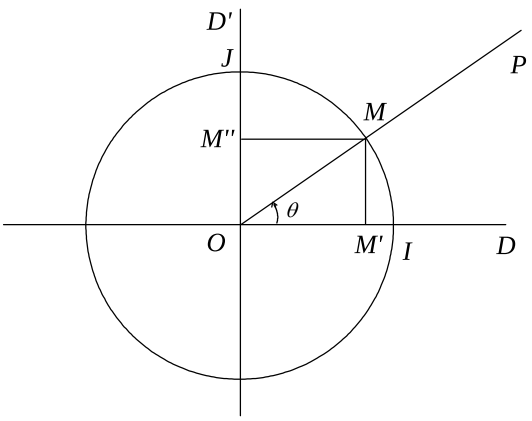
Le sens positif est communément le sens inverse des aiguilles d'une montre qui est appelé sens trigonométrique.

Les angles orientés vérifient la relation de Chasles :

$$\text{mes}([OA),[OB)) = \text{mes}([OA),[OC)) + \text{mes}([OC),[OB)).$$

3. Cosinus, sinus et tangente

Soient D et D' deux droites orthogonales se coupant en un point O.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 (appelé cercle trigonométrique).
Soit I l'un des deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec D et soit J le point d'intersection de D' et de $\mathscr{C}$ tel que $\text{mes}\ \widehat{IOJ} = \dfrac{\pi}{2}$.
Soit P un point du plan différent de O et soit M le point d'intersection de $[OP)$ et de $\mathscr{C}$.
Soient M' le projeté orthogonal de M sur D et M'' le projeté orthogonal de M sur D'.
Soit θ l'angle orienté $([OI),[OP))$.
On appelle cosinus de θ et on note $\cos\theta$ la mesure algébrique $\overline{OM'}$.
On appelle sinus de θ et on note $\sin\theta$ la mesure algébrique $\overline{OM''}$.
Lorsque $\cos\theta$ est non nul, on appelle tangente θ et on note $\tan\theta$ le réel $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.



4. Trigonométrie dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A.
Le côté $[BC]$ du triangle est appelé hypoténuse du triangle ABC.
Le côté $[AC]$ est dit opposé à l'angle $\hat{B}$ et le côté $[AB]$ est dit adjacent à $\hat{B}$.
On a $\cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$, $\sin\hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ et $\tan\hat{B} = \dfrac{AC}{AB}$.

Remarque

CAHSOHTOA (casse-toi) sont les initiales de : cosinus (=) adjacent (/) hypoténuse (;) sinus (=) opposé (/) hypoténuse (;) tangente (=) opposé (/) adjacent.

VIII. Droites et triangles

1. Des droites particulières

Définition

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par le milieu de $[AB]$.

Propriété

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B.

Démonstration

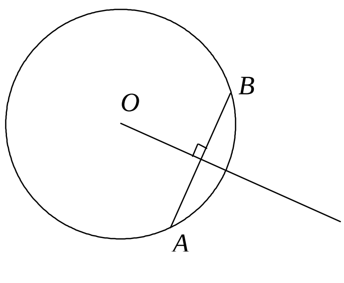
Soit I le milieu de $[AB]$ et soit C un point de la médiatrice de la droite $[AB]$ différent de I.
Les triangles AIC et BIC sont rectangles en I.
On a donc $AC^2 = AI^2 + IC^2 = BI^2 + IC^2 = BC^2$.

Réciproquement, soit C un point du plan tel que $AC = BC$ et $C \neq I$ (cas trivial).
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Les triangles AHC et BHC sont rectangles en H.
On a donc $AC^2 = AH^2 + HC^2$ et $BC^2 = BH^2 + HC^2$
D'où $AH^2 = BH^2$ ou encore $AH = BH$ c'est-à-dire $H = I$ et C est sur la médiatrice de $[AB]$.

Remarque

Méthode de construction au compas.

Conséquence



Si A et B sont deux points d'un cercle de centre O, alors la médiatrice de $[AB]$ passe par O.

En effet, le centre O est à égale distance des points du cercle.

Propriété

Soient A et B deux points et soit D une droite passant par A différente de (AB).
Alors il existe un seul cercle Γ passant par A et B tel que D soit la tangente à Γ en A.

Démonstration

La médiatrice de $[AB]$ n'est pas perpendiculaire à D. L'unique point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et la perpendiculaire à D qui passe par A donne le centre O de Γ. Le rayon du cercle est OA.

Définition

La bissectrice d'un angle ([*OA*),[*OB*)) est la droite *D* qui passe par *O* telle que, pour tout point *C* de l'une des demi-droites de *D* issue de *O*, on a $\text{mes}([OA),[OC)) = \frac{1}{2}\text{mes}([OA),[OB))$.

Propriété

La bissectrice d'un angle ([*OA*),[*OB*)) est l'ensemble des points équidistants aux droites (*OA*) et (*OB*).

Démonstration

Soit *C* un point d'une droite interceptant l'angle ([*OA*),[*OB*)).
Soit *D* son projeté orthogonal sur [*OA*) et *E* son projeté orthogonal sur [*OB*).
On pose $\theta = \text{mes}([OA),[OC))$ et $\theta' = \text{mes}([OB),[OC))$.
On a : *C* équidistant de (*OA*) et (*OB*) $\Leftrightarrow$ $CD = CE$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{CD}{OC} = \frac{CE}{OC} = \sin\theta' \Leftrightarrow \theta' = \theta.$$

$\Leftrightarrow$ *C* appartient à la bissectrice de ([*OA*),[*OB*)).

Remarque

Méthode de construction au compas.

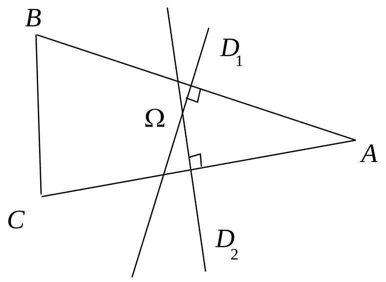
2. Les droites particulières du triangles

Définition-Propriété

Les médiatrices d'un triangle *ABC* sont les médiatrices des segments [*AB*], [*AC*] et [*BC*].
Elles sont concourantes en un point à égal distance des sommets. Il existe donc un cercle qui contient les sommets du triangle. Ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.

Démonstration

Soit D_1 la médiatrice de [*AB*] et soit D_2 la médiatrice de [*AC*].
Ces droites sont sécantes en un point Ω.



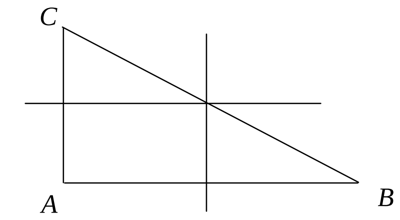
Puisque Ω appartient à D_1, on a $\Omega A = \Omega B$ et, puisque Ω appartient à D_2, on a $\Omega A = \Omega C$.
D'où $\Omega B = \Omega C$ et Ω appartient à la médiatrice de [*BC*]

Remarque 1

Réciproquement, le centre d'un cercle circonscrit à un triangle *ABC* est nécessairement sur chacune des médiatrices.
Dans un cas général (triangle non aplati), le cercle circonscrit au triangle et son centre sont donc uniques.

Remarque 2 : Cas particulier du triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A.



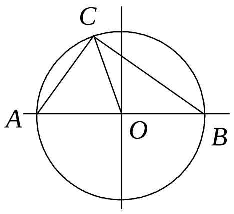
La médiatrice de $[AB]$ est parallèle à (AC) et la médiatrice de $[AC]$ est parallèle à (AB).
C'est donc, dans chaque cas, la droite des milieux. D'après le théorème de Thalès, le centre du cercle circonscrit est donc le milieu de $[BC]$.

Propriété

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. Pour tout point C du cercle $\mathscr{C}$, le triangle ABC est rectangle en C.

Démonstration

Soit O le centre de $\mathscr{C}$. On a donc $OC = OA = OB$.
Ce qui signifie que les triangles OAC et OBC sont isocèles en O.



Donc mes (OAC) = mes (ACO) et mes (CBO) = mes (BCO).
Or mes (ACB) = mes (ACO) + mes (BCO) = mes (OAC) + mes (CBO) = mes (BAC) + mes (CBA)
D'où π = mes (BAC) + mes (CBA) + mes (ACB) = 2 mes (ACB).

Propriété

Une tangente en un point du cercle est perpendiculaire au rayon du cercle en ce point.

Démonstration

Le rayon peut être vu comme la distance du centre cercle à la (droite) tangente.

Remarque

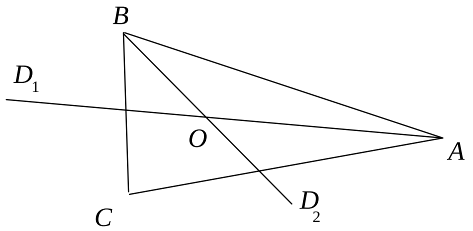
Cette propriété fournit aussi une méthode de construction à la règle et au compas d'une tangente à un cercle de centre O : il suffit de prendre le symétrique de O par rapport au point où l'on veut la tangente et de tracer la médiatrice du segment d'extrémités O et son symétrique.

Définition-Propriété

Les bissectrices d'un triangle ABC sont les bissectrices des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
Elles sont concourantes en un point à égal distance des côtés du triangle. Il existe donc un cercle tangent aux trois côtés du triangle qui est inclus dans celui-ci. Ce cercle est appelé cercle inscrit dans le triangle.

Démonstration

Soit D_1 la bissectrice de $\hat{A}$ et soit D_2 la bissectrice de $\hat{B}$. Ces droites sont sécantes en un point O.
Puisque O appartient à D_1, on a $d(O,(AB)) = d(O,(AC))$.
Et, puisque O appartient à D_2, $d(O,(AB)) = d(O,(BC))$.



D'où $d(O,(AC)) = d(O,(BC))$ c'est-à-dire O appartient à la bissectrice de $\hat{C}$.

Remarque

Réciproquement, le centre d'un cercle inscrit dans un triangle ABC est nécessairement sur chacune des bissectrices.

Dans un cas général (triangle non aplati), le cercle inscrit dans le triangle et son centre sont donc uniques.

Définition-Propriété

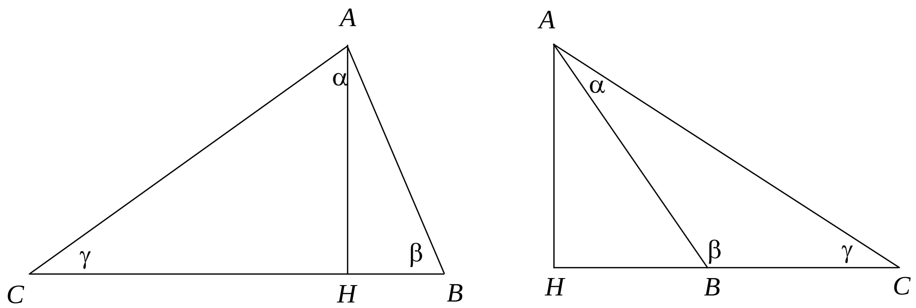
On appelle hauteur d'un triangle ABC une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé. Les hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre.

Démonstration

A titre d'exercice (n°40).

Remarque

Soit ABC un triangle. Soit H le point de (BC) tel que (AH) soit une hauteur du triangle ABC. On dit que (AH) est la hauteur issue de A. Mais on parle aussi de hauteur en parlant de la longueur AH ou du segment $[AH]$. En particulier, $AH = AC \sin \hat{C} = AB \sin \hat{B}$.



Remarquons que si, par exemple, l'angle $\hat{B}$ est obtu, on a $\sin(\pi - \hat{B}) = \sin \hat{B}$.

Définition-Propriété

On appelle médiane d'un triangle ABC une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé. Les médianes sont concourantes en un point appelé centre de gravité. De plus, le rapport entre la distance du centre de gravité à un sommet et la distance du centre de gravité au milieu du côté opposé à ce sommet est 2. En outre, chaque médiane coupe le triangle en deux parties de même aire.

Démonstration

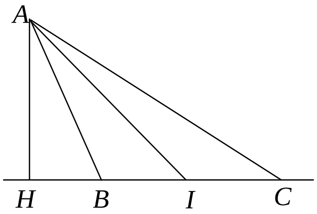
A titre d'exercice (n°23).

Propriété (théorème de la médiane)

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$. Alors $AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$

Démonstration

Soit H le point de (BC) tel que (AH) soit une hauteur de ABC.



Les triangles AHI, AHB et AHC sont rectangles en H.

$AB^2 = AH^2 + BH^2$

$AC^2 = AH^2 + CH^2$

$AI^2 = AH^2 + IH^2$

Donc $AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BH^2 + CH^2 + 2AI^2 - 2IH^2$

Il faut donc montrer que $BH^2 + CH^2 - 2IH^2 = 2BI^2$ ou encore $BH^2 + CH^2 = 2IH^2 + 2BI^2$.

On a $BH^2 + CH^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \left(\overline{BI} + \overline{IH}\right)^2 + \left(\overline{CI} + \overline{IH}\right)^2$

$= \overline{BI}^2 + 2 \times \overline{BI} \times \overline{IH} + \overline{IH}^2 + \overline{CI}^2 + 2 \times \overline{CI} \times \overline{IH} + \overline{IH}^2$

$= \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 + 2 \times \left(\overline{BI} + \overline{CI}\right) \times \overline{IH} + 2\overline{IH}^2$ or $\overline{CI} = -\overline{BI}$.

$= 2\overline{BI}^2 + 2\overline{IH}^2$

$= 2BI^2 + 2IH^2$.

Propriété

Dans un triangle (non aplati), le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont alignés (droite d'Euler).

Démonstration

A titre d'exercice (n°24).

Propriété

Dans un triangle (non aplati), il existe un cercle passant par les (3) milieux des côtés, les (3) pieds des hauteurs et les (3) milieux des segments reliant l'orthocentre aux sommets. Ce cercle dit des neuf points est aussi appelé cercle d'Euler, cercle de Feuerbach, cercle de Terquem ou cercle médian.

3. Triangles particuliers

Un triangle est dit isocèle s'il possède deux côtés de même longueur.

Dans un triangle ABC isocèle en A, les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ont même mesure (il suffit de considérer la hauteur issue du sommet reliant les deux côtés de même longueur et les sinus faisant intervenir cette hauteur).
La hauteur issue de A, la médiane issue de A, la médiatrice de $[BC]$ et la bissectrice de $\hat{A}$ sont confondues.

Un triangle est dit équilatéral si ses trois côtés ont même longueur.

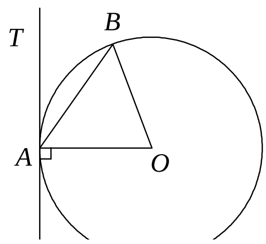
Dans un triangle équilatéral, les angles sont tous égaux. Les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices sont confondues.

IX. Angles inscrits

Propriété

Soit Γ un cercle de centre O et A et B deux points différents du cercle et soit T ($\neq A$) un point de la tangente à Γ en A tel que B et T soient dans le même demi-plan de frontière (AO).
Alors $\text{mes}\,\widehat{AOB} = 2\,\text{mes}\,\widehat{TAB}$.

Démonstration

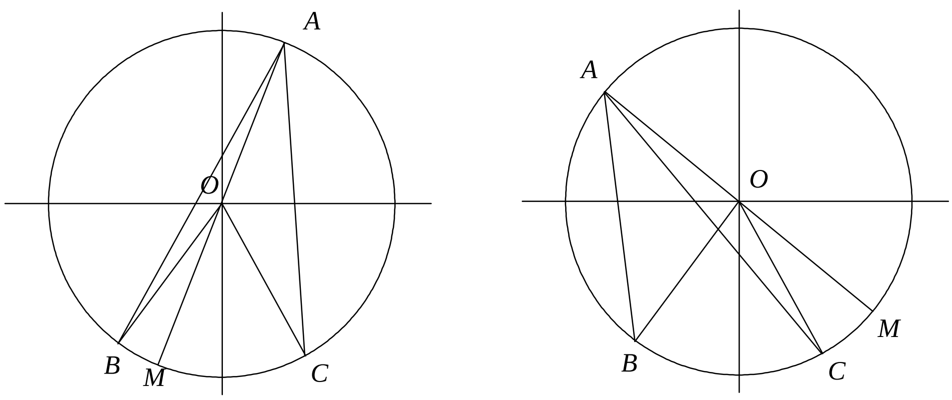


Puisque le triangle AOB est isocèle en O, $2\,\text{mes}\,(BAO) + \text{mes}\,(AOB) = \pi$.
Mais $\text{mes}\,(BAO) = \pi/2 - \text{mes}\,(TAB)$.
D'où $2\,(\pi/2 - \text{mes}\,(TAB)) + \text{mes}\,(AOB) = \pi$ c'est-à-dire $-2\,\text{mes}\,(TAB) + \text{mes}\,(AOB) = 0$.

Propriété

Soit Γ un cercle de centre O et A, B et C trois points différents du cercle tels que A et O soient dans le même demi-plan de frontière (BC). Alors $\text{mes}\,\widehat{BOC} = 2\,\text{mes}\,\widehat{BAC}$.

Démonstration



Les triangles OAB et OAC sont isocèles.

On a donc $\quad 2\,\text{mes}\,(BAO) = \pi - \text{mes}\,(AOB)$
et $\quad 2\,\text{mes}\,(OAC) = \pi - \text{mes}\,(COA)$.

Soit M le symétrique de A par rapport à O.
On a $\text{mes}\,(BOM) = \pi - \text{mes}\,(AOB)$ et $\text{mes}\,(MOC) = \pi - \text{mes}\,(COA)$.
C'est-à-dire $2\,\text{mes}\,(BAO) = \text{mes}\,(BOM)$ et $2\,\text{mes}\,(OAC) = \text{mes}\,(MOC)$.

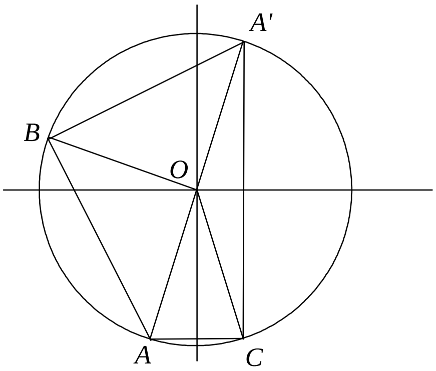
En terme d'angles orientés, on a :

$$2\,\text{mes}\,(BAC) = 2\,(\text{mes}\,(BAO) + \text{mes}\,(OAC)) = \text{mes}\,(BOM) + \text{mes}\,(MOC) = \text{mes}\,(BOC).$$

Corollaire

Soit Γ un cercle de centre *O* et *A*, *B* et *C* trois points différents du cercle tels que *A* et *O* soient dans les deux demi-plans différents de frontière (*BC*).
Alors mes $\widehat{BOC} = 2(\pi - \text{mes}\,\widehat{CAB})$.

Démonstration



Soit *A'* le symétrique de *A* par rapport à *O*.
A' et *O* sont dans le même demi-plan de frontière (*BC*).
Donc $\text{mes}(BOC) = 2\,\text{mes}(BA'C)$.
Les triangles *ABA'* et *ACA'* sont rectangles respectivement en *B* et *C*.
Donc $\text{mes}(OAB) + \text{mes}(BA'O) = \pi / 2$ et $\text{mes}(CAO) + \text{mes}(OA'C) = \pi /2$.
C'est-à-dire $\text{mes}(BA'C) = \text{mes}(BA'O) + \text{mes}(OA'C)$

$$= \pi / 2 - \text{mes}(OAB) + \pi /2 - \text{mes}(CAO)$$
$$= \pi - \text{mes}(CAB)$$

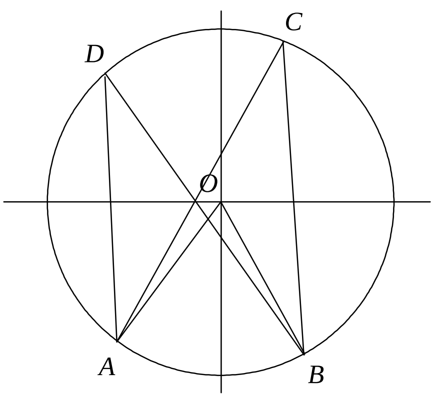
D'où le résultat.

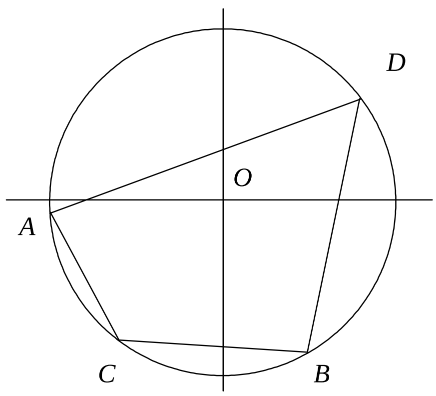
Corollaire

Soit Γ un cercle de centre *O* et *A*, *B*, *C* et *D* quatre points différents du cercle.
Si *C* et *D* sont dans le même demi-plan de frontière (*AB*), alors mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{ADB}$.
Sinon mes $\widehat{BCA} = \pi - \text{mes}\,\widehat{ADB}$.

Réciproquement, si *A*, *B*, *C* et *D* sont quatre points différents du plan tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés et vérifiant mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{ADB}$ lorsque *C* et *D* sont dans le même demi-plan de frontière (*AB*) ou mes $\widehat{BCA} = \pi - \text{mes}\,\widehat{ADB}$ dans le cas contraire, alors les points *A*, *B*, *C* et *D* sont cocycliques.

Démonstration





On a mes$\widehat{AOB}$ = 2 mes$\widehat{ACB}$ ou mes$\widehat{AOB}$ = 2(π − mes$\widehat{ACB}$) suivant que *C* et *O* soient dans le même demi-plan de frontière (*AB*). De même pour *D*.

Réciproque : Soient *A*, *B*, *C* et *D* quatre points différents du plan tels que mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{ADB}$ et tels que *C* et *D* soient dans le même demi-plan de frontière (*AB*).
Soit Γ le cercle circonscrit au triangle *ABC* et soit Γ′ le cercle circonscrit au triangle *ABD*.
Soit *T* (≠ *A*) un point de la tangente à Γ en *A* tel que *B* et *T* soient dans le même demi-plan de frontière (*AO*).
Soit *T*′ (≠ *A*) un point de la tangente à Γ′ en *A* tel que *B* et *T*′ soient dans le même demi-plan de frontière (*AO*).
On a donc 2 mes$\widehat{TAB}$ = mes$\widehat{AOB}$ = 2 mes$\widehat{T'AB}$. Ce qui implique que (*AT*) = (*AT*′).
Les cercles Γ et Γ′ passent par *A* et *B* et ont même tangente en *A* : ils sont donc égaux.
Ce qui signifie que *A*, *B*, *C* et *D* sont sur le même cercle.

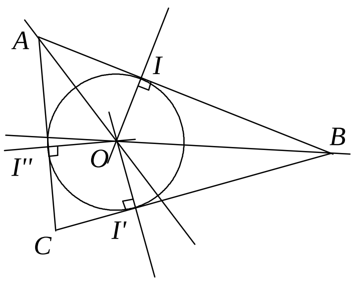
X. Loi des sinus, théorème d'Al Kashi et formule de Héron

Propriété

Soit un triangle *ABC* et soit *r* le rayon du cercle inscrit dans *ABC*.
Alors l'aire de *ABC* est $a(ABC) = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC)$.

Démonstration

Soit *O* le centre du cercle inscrit dans le triangle *ABC*.
Soient *H*, *H*′ et *H*′′ les projetés orthogonaux de *O* sur respectivement (*AB*), (*BC*) et (*AC*).
O est l'intersection des bissectrices et est à équidistance des droites (*AB*), (*BC*) et (*AC*).
C'est-à-dire *OH* = *OH*′ = *OH*′′ = *r*.



On a $a(ABC) = a(AOB) + a(AOC) + a(BOC) = \frac{1}{2}AB \times OI + \frac{1}{2}BC \times OI' + \frac{1}{2}AC \times OI''$.
D'où le résultat.

Propriété

Soit un triangle *ABC* dont les angles sont notés $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
L'aire de *ABC* est $a(ABC) = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\hat{A} = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin\hat{B} = \frac{1}{2}BC \times AC \times \sin\hat{C}$.

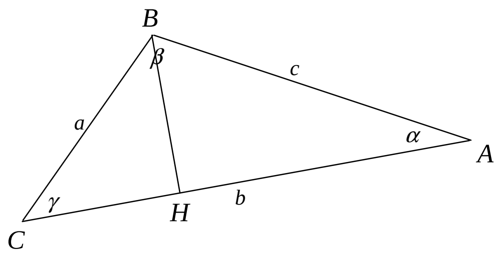
Démonstration

Si on note les angles α, β et γ et si on pose *BC* = *a*, *AC* = *b* et *AB* = *c*, la relation devient donc :
$a(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
On utilise la formule initiale de calcul d'aire. On choisit une base par exemple *AC* et un angle à cette base par exemple α. La hauteur issue de *B* a pour longueur $AB\sin\hat{A}$ (rappelons que $\sin(\pi - x) = \sin x$).

Propriété (loi des sinus)

Soit un triangle ABC dont les angles sont notés $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
On a $\dfrac{\sin\hat{A}}{BC} = \dfrac{\sin\hat{B}}{AC} = \dfrac{\sin\hat{C}}{AB}$.

Démonstration



Si on note les angles α, β et γ et si on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$, la relation devient donc :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Soit $h = BH$ la hauteur issue de B.
On a $\sin\alpha = \dfrac{h}{c}$ et $\sin\gamma = \dfrac{h}{a}$ c'est-à-dire $c\sin\alpha = a\sin\gamma$.
D'où $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

On obtient l'autre relation en considérant la hauteur issue de A ou celle issue de C.

Définition

Deux triangles sont dits semblables s'ils ont deux angles égaux.

Remarques

Puisque la somme des angles d'un triangle est π, il revient au même de dire que deux triangles ont deux angles égaux ou trois angles égaux.
On parle aussi de triangles homothétiques et proportionnels (du fait de la propriété qui suit).

Propriété

Deux triangles semblables ont leur côtés proportionnels.

Remarque

Cela signifie que si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\hat{B} = \hat{B}'$ alors on a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Démonstration

La preuve peut se faire en utilisant le théorème de Thalès.
Mais aussi en utilisant les relations : $\dfrac{\sin\hat{A}}{BC} = \dfrac{\sin\hat{B}}{AC} = \dfrac{\sin\hat{C}}{AB}$ et $\dfrac{\sin\hat{A}'}{B'C'} = \dfrac{\sin\hat{B}'}{A'C'} = \dfrac{\sin\hat{C}'}{A'B'}$.
Puisque $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$, il s'en suit que $\dfrac{\sin\hat{A}}{B'C'} = \dfrac{\sin\hat{B}}{A'C'} = \dfrac{\sin\hat{C}}{A'B'}$.
La propriété s'obtient en multipliant les égalités précédentes par $\dfrac{BC}{\sin\hat{A}} = \dfrac{AC}{\sin\hat{B}} = \dfrac{AB}{\sin\hat{C}}$.

Propriété

Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et si S est son aire, on a : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{abc}{2S} = 2R$.

Démonstration

Puisque $S = a(ABC) = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, on a $\dfrac{abc}{2S} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Si $[BC]$ est le diamètre du cercle, alors ABC est rectangle en A, on a bien $\sin\alpha = 1$, $R = \dfrac{a}{2}$ et $2S = bc$.

Si $[BC]$ n'est pas le diamètre du cercle, soit B' le symétrique de B par rapport à O.
Le triangle $BB'C$ est rectangle en C et on a $\sin\alpha = \sin\hat{A} = \sin\widehat{BB'C}$ (corollaire du théorème de l'angle inscrit). Et $\sin\widehat{BB'C} = \dfrac{BC}{BB'} = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{a}{2R}$.

Théorème d'Al Kashi (loi des cosinus)

Soit un triangle ABC dont les angles sont notés $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
On a $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\times AB\cos\hat{A}$.

Remarque 1

Si on note les angles α, β et γ et si on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$, la relation devient donc :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

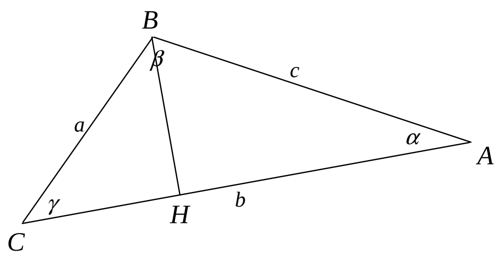
On a aussi : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Remarque 2

Si le triangle est rectangle en A, alors $\cos\hat{A} = 0$ et on obtient le théorème de Pythagore.

Démonstration



On a $a^2 = BH^2 + CH^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 = (c\sin\alpha)^2 + (b - c\cos\alpha)^2$

$= c^2\sin^2\alpha + b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha$

$= c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$

Remarque

A l'orientation et à la position près, un triangle est entièrement déterminé par :
- La donnée de trois longueurs.
- La donnée de deux longueurs et d'un angle.
- La donnée de une longueur et de deux angles

Propriété (formule de Héron d'Alexandrie)

Soit ABC un triangle.
L'aire d'un triangle ABC de longueurs de côtés a, b et c vaut $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p est le demi-périmètre c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Démonstration

Remarquons que : $p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
$= \frac{1}{16}[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]$.

On a $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\hat{A} = \frac{1}{2}c \times b \times \sin\alpha$.
D'où $S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\alpha$.

Or $\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$ (Théorème d'Al Kashi).
De plus, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \left(\frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right)$
$= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2}$.

Donc $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Propriété (loi des tangentes)

Soit un triangle ABC dont les angles sont notés $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

On a $\frac{BC - AC}{BC + AC} = \frac{\tan\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\tan\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}$.

Remarque

Cette relation peut aussi s'écrire : $\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Démonstration

Rappelons que : $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
et $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

Puisque $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$, on a $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.
Et donc $\left(\frac{a+b}{c}\right)\sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

De même, on obtient que $\left(\frac{a-b}{c}\right)\sin\gamma = \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

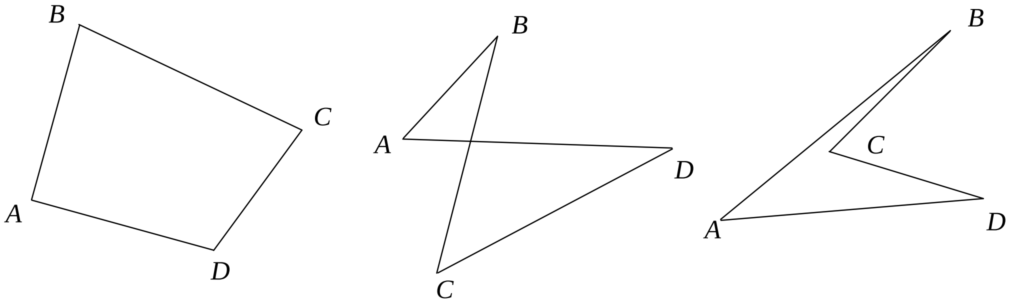
D'où $\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ et le résultat.

XI. Polygones

1. Quadrilatères

Un quadrilatère est la donnée de quatre points du plan appelé sommets du quadrilatère.
Si *ABCD* est un quadrilatère, on appelle côtés du quadrilatère les segments [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*].
Par abus, on identifiera un quadrilatère à ses côtés.

Comme pour les triangles, nous négligerons le cas des quadrilatères aplatis.



Les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont les segments [*AC*] et [*BD*].

Un quadrilatère est dit convexe si, quelque soit le côté choisi, les deux sommets restants sont dans le même demi-plan de frontière ce côté.

Un quadrilatère est dit croisé si deux segments non consécutifs sont sécants.

Un quadrilatère est dit concave s'il n'est ni convexe ni croisé.

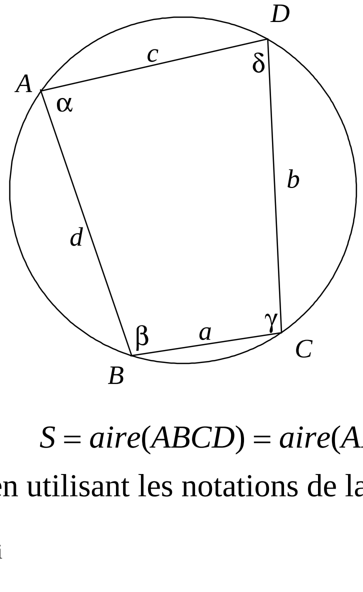
Propriété (Formule de Brahmagupta)

Soit *ABCD* un quadrilatère convexe inscriptible (les sommets sont cocycliques) dont les longueurs des côtés sont *a*, *b*, *c* et *d*. Alors l'aire de *ABCD* est $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ où *p* désigne le demi-périmètre c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Remarque

C'est une généralisation du Théorème de Héron dont on obtient le résultat en prenant deux points du quadrilatère confondus i.e. l'une des longueurs est nulle.

Démonstration



On a : $S = aire(ABCD) = aire(ABC) + aire(ACD) = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin\hat{B} + \frac{1}{2}AD \times CD \times \sin\hat{D}$
ou encore, en utilisant les notations de la figure ci-dessus : $2S = ad\sin\beta + bc\sin\delta$.

Les angles β et δ sont supplémentaires. Ils ont donc même sinus et leurs cosinus sont opposés.
Il s'en suit que $2S = (ad + bc)\sin\beta$ et $4S^2 = (ad + bc)^2 \sin^2\beta$.

Le théorème d'Al Kashi utilisé dans les triangles ABC et ACD ayant le côté $[AC]$ commun nous donne :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\,AB \times BC \cos\hat{B} \text{ et } AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2\,AD \times CD \cos\hat{D}.$$

Ou encore $\quad a^2 + d^2 - 2\,ad\cos\beta = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\delta = b^2 + c^2 + 2\,bc\cos\beta$.
C'est-à-dire $\quad 2\,(ad + bc)\cos\beta = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$ et donc $4\,(ad + bc)^2\cos^2\beta = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$.

D'où

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4(ad + bc)^2 \sin^2\beta = 4(ad + bc)^2(1 - \cos^2\beta) \\ &= 4(ad + bc)^2 - 4(ad + bc)^2 \cos^2\beta \\ &= (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= [(2ad + 2bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)][(2ad + 2bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)] \\ &= [(b + c)^2 - (a - d)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2)] \\ &= (-a + b + c + d)\,(a + b + c - d)(a - b + c + d)(a + b - c + d) \end{aligned}$$

On obtient le résultat car :

$$\begin{aligned} p - a &= \frac{1}{2}(a + b + c + d) - a = 2\,(-a + b + c + d) \\ p - b &= 2\,(a - b + c + d) \\ p - c &= 2\,(a + b - c + d) \\ p - d &= 2\,(-a + b + c + d) \end{aligned}$$

Propriété

Un quadrilatère convexe est inscriptible (rappel : les sommets sont cocycliques) si et seulement si deux angles opposés sont supplémentaires.

Propriété

Un quadrilatère croisé est inscriptible si et seulement si deux angles opposés sont égaux.

Démonstration

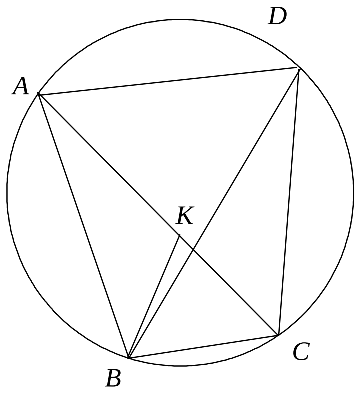
Il s'agit de corollaires des propriétés des angles inscrits.

Propriété (théorème de Ptolémée)

Dans un quadrilatère convexe inscriptible, le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Démonstration

Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible et K le point de $[AC]$ tel que $\text{mes}\,(ABK) = \text{mes}\,(DBC)$.



On a $\text{mes}(ABD) = \text{mes}(ABK) + \text{mes}(KBD)$ (angles orientés)
$= \text{mes}(DBC) + \text{mes}(KBD)$
$= \text{mes}(KBC)$
Et $\text{mes}(ADB) = \text{mes}(ACB)$ (points cocycliques)
$= \text{mes}(KCB)$

Les triangles *ABD* et *KBC* sont donc semblables.
On a donc $\frac{CK}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

On montre de même que les triangles *ABK* et *DBC* sont semblables.
Et on obtient $\frac{AK}{CD} = \frac{AB}{BD}$.

D'où $CK \times BD = AD \times BC$
$AK \times BD = CD \times AB$
$AC \times BD = (AK + CK) \times BD = AD \times BC + CD \times AB.$

Remarque

La réciproque est vraie mais la démonstration fait intervenir une propriété que nous n'avons pas vue.

2. Parallélogramme

Définition

On appelle parallélogramme tout quadrilatère (convexe) dont les diagonales se coupent en leur milieu.

Propriété

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont parallèles.
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés ont même longueur.

Démonstration

Théorème de Thalès et sa réciproque en considérant les diagonales du quadrilatère.

Définition

Un rectangle est un parallélogramme qui possède un angle droit.

Propriété

Les diagonales d'un rectangle ont même longueur.

Démonstration

Théorème de Pythagore à partir des côtés du rectangle.

Propriété (identité du parallélogramme)

Soit *ABCD* un parallélogramme.
Alors on a $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

Démonstration

Soit O le centre du parallélogramme (intersection des diagonales).
La droite (OB) est une médiane du triangle ABC et la droite (OD) est une médiane du triangle ACD.
On a donc $AB^2 + BC^2 = 2BO^2 + 2AO^2$
et $AD^2 + CD^2 = 2DO^2 + 2OC^2$

D'où $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4BO^2 + 4AO^2 = BD^2 + AC^2$.

Définition

Un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

Propriété

Les côtés d'un losange ont même longueur.

Démonstration

Théorème de Pythagore à partir des demi-diagonales du losange.

Définition

Un carré est un losange-rectangle.

3. Polygones

Définitions

Un polygone est une suite finie $A_1A_2A_3...A_n$ de n (≥ 3) points du plan appelés sommets (l'ordre des sommets a de l'importance dans le polygone).

Les segments [A_i, A_{i+1}] avec la convention $A_{n+1} = A_1$ reliant les couples de sommets consécutifs sont appelés les côtés du polygone.

Chaque sommet ainsi que les côtés qui s'y interceptent forment un angle. On dit que c'est un angle du polygone.

Remarques

- # Un polygone à n sommets possède aussi n côtés et n angles.
- # Un segment reliant deux sommets non consécutifs d'un polygone est appelé une diagonale de ce polygone. Une diagonale est donc un segment qui joint deux sommets et qui n'est pas un côté du polygone. Un polygone à n côtés possède ainsi $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.
- # La notion de polygone se généralise en dimension 3 par celle de polyèdre.

Notation

Un polygone à trois sommets est un triangle.
Un polygone à quatre sommets est un quadrilatère.
Un polygone à cinq sommets est un pentagone
Un polygone à six sommets est un hexagone
Un polygone à sept sommets est un heptagone
Un polygone à huit sommets est un octogone
Un polygone à neuf sommets est un nonagone
Un polygone à dix sommets est un décagone
Un polygone à onze sommets est un hendécagone
Un polygone à douze sommets est un dodécagone

Il existe des noms pour les polygones qui suivent. Néanmoins, au dessus de 10, nous utiliserons l'appellation "polygone à n côtés".

Définition

Un polygone est dit convexe si son intérieur est convexe.

Remarque

- Un polygone est convexe si et seulement si tous ses angles sont saillants.
- Un polygone est convexe si et seulement si, étant donné une droite passant par deux sommets consécutifs, tous les autres sommets sont dans le même demi-plan de frontière cette droite.
- Un polygone est convexe si et seulement si toutes ses diagonales sont à l'intérieur de la surface délimitée par le polygone.

Définition

Un polygone est dit croisé si au moins deux de ses côtés non consécutifs sont sécants.

Définition

Un polygone est dit concave s'il n'est ni convexe ni croisé.

Propriété

La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est égale à $(n - 2)\pi$.

Démonstration

Soit M un point intérieur à un polygone $A_1A_2A_3...A_n$.
La somme des angles au sommet M des différents triangles A_iMA_{i+1} (avec la convention $A_{n+1} = A_1$) est 2π.
La somme des angles du polygones est la somme des angles des n différents triangles A_iMA_{i+1} moins la somme des angles au sommet M c'est-à-dire $n\pi - 2\pi$.

Définition

Un polygone convexe est dit régulier si tous ses côtés sont égaux et si tous ses angles sont égaux.

Remarque

Un polygone convexe est régulier si tous ses côtés sont égaux et si tous ses sommets sont sur un cercle.
Un polygone régulier possède donc un centre et un cercle circonscrit.

Propriété

Les angles d'un polygone régulier à n sommets sont tous égaux à $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

Définition

Un polygone est dit inscriptible si tous ses sommets se trouvent sur un même cercle appelé cercle circonscrit au polygone.

Exemples

Un triangle est inscriptible.
Un parallélogramme est inscriptible si et seulement si c'est un rectangle.
Un polygone régulier est inscriptible.

Définition

Un polygone est dit circonscriptible si tous ses côtés sont tangents à un même cercle appelé cercle inscrit dans le polygone.

Exemples

Un triangle est circonscriptible.
Un parallélogramme est circonscriptible si et seulement si c'est un losange.
Un polygone régulier est circonscriptible.

Définition

Les médiatrices d'un polygone sont les médiatrices des côtés du polygone.

Remarques

Les médiatrices d'un polygone régulier sont appelées apothèmes : ce sont les droites passant par le centre du polygone et les milieux de ses côtés. On parle aussi d'apothèmes pour les segments et non les droites. Le rayon du cercle inscrit dans un polygone régulier est la longueur d'un apothème.

Propriété

Pour qu'un polygone convexe possède un cercle circonscrit, il faut et il suffit que ses médiatrices soient concourantes.

Démonstration

Le centre d'un cercle passant par tout les sommets d'un polygone est à égale distance de ceux-ci. Il appartient donc toutes les médiatrices des côtés.

Réciproquement, le point d'intersection des médiatrices des côtés est à égale distance des sommets.

Définition

Les bissectrices d'un polygone sont les bissectrices des angles du polygone.

Propriété

Pour qu'un polygone convexe possède un cercle inscrit, il faut et il suffit que ses bissectrices soient concourantes.

Démonstration

Le centre d'un cercle tangent à tous les côtés d'un polygone est à égale distance de deux côtés consécutifs. Il appartient donc à la bissectrice de l'angle défini par ces deux côtés c'est-à-dire un des angles du polygone. Réciproquement, le point d'intersection des bissectrices est à égale distance des côtés.

XII. Contructibilité à la règle et au compas

1. Préliminaires

Définition

Un point M est dit constructible à la règle et au compas à partir d'un point P s'il existe une succession d'opérations faisant intervenir uniquement des droites et des cercles (dont on connaît le centre et le rayon) qui permettent d'obtenir M à partir de P.

Un réel x est dit constructible si l'on peut construire à la règle et au compas un segment de longueur x à partir d'un segment de longueur 1.

Remarque

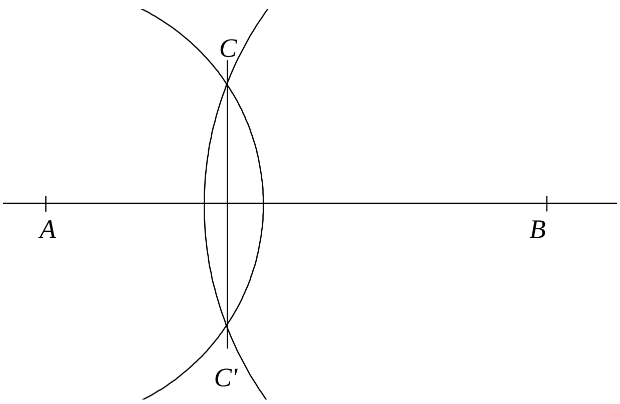
On peut considérer des constructions avec seulement une règle (non graduée). Mais c'est assez restrictif car, par exemple, il a été montré que l'on ne peut pas représenter le milieu d'un segment ou tracer la parallèle à une droite passant par un point donné avec uniquement une règle comme outil.

On peut aussi considérer des constructions avec seulement un compas. Il a été prouvé que tout nombre qui est constructible à la règle et au compas, l'est aussi uniquement au compas.

Exemple 1

La construction du symétrique d'un point par rapport à un droite ou la construction de la perpendiculaire à une droite passant par un point : Soit D une droite et soit C un point du plan qui n'appartient pas à D.

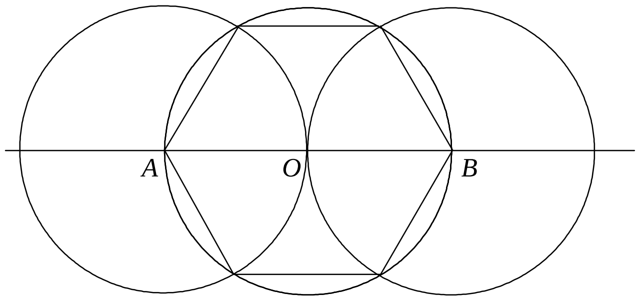
On choisit deux points A et B de D de sorte que l'angle ACB soit obtu.
On trace ensuite les cercles de centre A de rayon AC et de centre B de rayon BC.
L'autre point C' d'intersection de ces cercles est le symétrique de C par rapport à la droite D et la droite (CC') est perpendiculaire à D.



Exemple 2

On cherche à construire un hexagone inscrit dans un cercle.

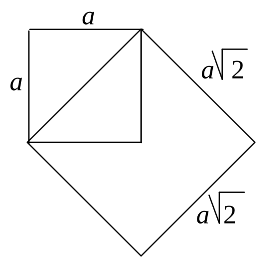
Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r.
Soient A et B les points d'intersection de Γ avec une droite qui passe par O.
L'intersection des cercles de centres A et B et de rayons r avec Γ donnent 4 points E, F, G et H.
Les points A, B, E, F, G et H sont les sommets (non consécutifs) d'un hexagone régulier.



Remarque

Les trois grands problèmes de constructibilité (à la règle et au compas) de l'antiquité furent la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle (dont une expression est restée).
Il a été montré au XIXème siècle (P.-L.Wantzel) que ces problèmes n'avaient pas de solution.

La duplication du cube : On sait construire un carré de surface double d'un carré donné.
En effet, si l'aire d'un carré est a^2 (donc de côté a), le carré de côté $a\sqrt{2}$ a pour aire $2a^2$. Le réel $a\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonal du carré initial.



On ne sait pas construire un cube dont le volume serait le double du volume d'un cube donné!

La trisection de l'angle : On sait couper un angle en 2 (bissectrices).
On ne sait pas construire deux droites qui partageraient un angle en 3.

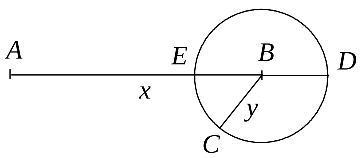
La quadrature du cercle : On ne sait pas construire un cercle ayant la même surface qu'un carré donné ou inversement.

2. Opérations

Propriété

L'addition ou la soustraction de deux nombres constructibles est constructible.

Démonstration



Si $AB = x$ et $BC = y$ alors $AD = x + y$ et $AE = x - y$.

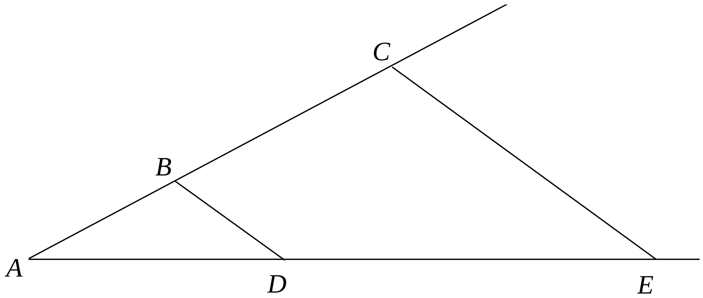
Conséquence

Tous les entiers sont constructibles.

Propriété

La multiplication ou la division de deux nombres constructibles est constructible.

Démonstration



On a $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AE}{AD}$ c'est-à-dire $AE = AD \times \dfrac{AC}{AB}$.

Si $AD = 1$, $AC = x$ et $AB = y$ alors $AE = x / y$.
Si $AB = 1$, $AC = x$ et $AD = y$ alors $AE = xy$.

Conséquence

Toutes les fractions rationnelles sont constructibles.

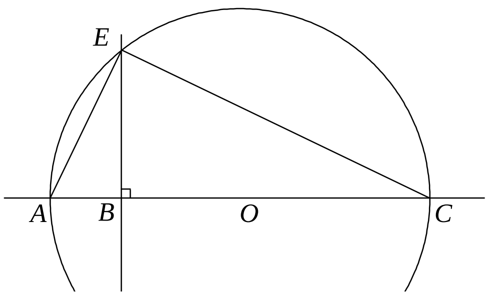
Propriété

La racine carrée d'un nombre constructible est constructible.

Démonstration

Soit x un nombre réel constructible tel que $x > 1$.
On considère un cercle Γ de centre un point O et de rayon $r = \dfrac{x}{2}$ (qui est bien constructible aussi).
Soit D une droite qui passe par O et soient A et C les points d'intersection de D avec Γ.
Soit B le point de D intérieur à Γ tel que $AB = 1$.
Soit E un des deux points d'intersection de Γ avec la perpendiculaire à D passant par B.

On a : $AB = 1$ $BC = x - 1$.
Les angles $\widehat{EAC} = \widehat{EAB}$ et $\widehat{BCE}$ sont supplémentaires donc $\widehat{AEB} = \widehat{ECB}$.
De plus, $\dfrac{AB}{EB} = \tan\left(\widehat{AEB}\right) = \tan\left(\widehat{ECB}\right) = \dfrac{EB}{BC}$ d'où $EB^2 = AB \times BC = x - 1$
Et, d'après le théorème de Pythagore, $AE^2 = AB^2 + EB^2 = 1 + x - 1 = x$ et donc $AE = \sqrt{x}$.



Pour généraliser à tout nombre constructible $x \geq 0$ (pas nécessairement plus grand que 1), on considère le nombre $y = \dfrac{1}{x}$.
Le nombre y est constructible (division des nombres constructibles 1 et x) et on a $y > 1$ lorsque $x < 1$.
On peut donc construire $\sqrt{y}$ et, par suite, $\sqrt{x}$ puisque $\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.