

# Chapitre 9 : Développements limités

F. Wlazinski

9th January 2004

Dans tout ce chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}$  tout entier,  $x_0$  est un élément de  $I$ ,  $f$  est un élément de  $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ ,  $n$  est un entier naturel et  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

## 1 Formules de Taylor

### Remarque 1

Il existe plusieurs formulations du Théorème de Taylor. Les plus connues étant nommées “avec reste intégrable”, “avec reste de Lagrange” ou “avec reste de Young”. Les conditions initiales de chacune de ces formulations ne sont pas exactement les mêmes.

### Théorème 2 Formule de Taylor-Young

On suppose que  $f$  est continue et dérivable  $n$  fois c'est-à-dire  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ .

Alors il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I$  telle que :  $\forall x \in I$ ,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

Si on remplace  $x$  par  $x_0 + h$ , on obtient :  $\forall h \in \mathbb{R} / x_0 + h \in I$ ,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

### Remarques 3

- La notation  $o_{x_0}((x - x_0)^n)$  ou  $o((x - x_0)^n)$  signifie  $(x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ .
- De même,  $o(h^n)$  signifie  $h^n\varepsilon(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .
- On a la formulation équivalente :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(h^n).$$

- On utilise assez souvent le développement de Taylor en 0 dont la formule est :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Ou parfois avec  $h$  qui est une formulation équivalente puisque  $x_0 = 0$ .

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(h^n).$$

- Pour  $n = 2$ , on obtient l'équation de la parabole tangente à la courbe.
- On peut éventuellement prolonger par continuité la fonction  $\varepsilon$  en 0 en posant  $\varepsilon(0) = 0$  c'est-à-dire la limite quand  $h$  tend vers 0 de  $\varepsilon$ .

### Exemple 4

Développement de Taylor de  $\sin$  à l'ordre 6 en 0 :  $\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + o(h^6)$ .

### Remarque 5

$\sin$  est une fonction impaire et les coefficients du D.L. en 0 de  $\sin$  sont tous impaires.

## 2 Développement limité en un point

### Définition 6

On suppose que  $x_0$  est réel.

Soit  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  admet un développement limité (D.L.) d'ordre  $n$  en  $x_0$  si et seulement si :  $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} / \forall x \in V$ ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ ou encore}$$
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \text{ avec}$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$  est appelée partie principale du D.L. (de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $n$ ).

$(x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$  est appelée reste du D.L. à l'ordre  $n$  (de  $f$  en  $x_0$ ).

### Exemple 7

La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin x$  admet un D.L. d'ordre 2 en 0. En effet,  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^2(x \sin x)$  et on a bien  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$ .

### Remarques 8

- Dans le cas particulier  $x_0 = 0$ , on a  $f$  admet un D.L. d'ordre  $n$  en 0 si et seulement si  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ .

- Le reste d'un D.L à l'ordre  $p \geq n$  de tout polynôme de degré  $n$  est nul.

Par exemple si on cherche de D.L. à l'ordre 2 en  $x_0 = 1$  de  $f(x) = x^2 + 4x + 1$ , on obtient  $f(x) = 6 + 6(x - 1) + (x - 1)^2 = 6 + 6(x - 1) + (x - 1)^2 + o((x - 1)^2) = 6 + 6(x - 1) + (x - 1)^2 + o((x - 1)^{100})$ .

### Propriété 9

Si  $f$  admet un D.L. en  $x_0$  de partie principale  $P$  alors  $f \sim_{x_0} P$ .

### Propriété 10

Toute fonction  $n$  fois continûment dérivable sur un voisinage de  $x_0$  admet un D.L. d'ordre  $n$  en  $x_0$ . Celui-ci est donné par exemple par la formule de Taylor.

### Exemples 11

- D.L. de  $e^x$  en 0 à l'ordre 5 :  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ .

- D.L. de  $(1 + x)^\alpha$  en 0 à l'ordre 4 avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

Sur  $] -1, 1[$ , on a  $1 + x > 0$  donc  $(1 + x)^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$ .

On a  $((1 + x)^\alpha)' = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$

$$((1 + x)^\alpha)'' = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}$$

$$((1 + x)^\alpha)^{(3)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(1 + x)^{\alpha-3}$$

$$((1 + x)^\alpha)^{(4)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(1 + x)^{\alpha-4} \quad \text{donc :}$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

- En particulier pour  $\alpha = -1$  :  $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$ .

### Remarque 12

Attention, on n'a pas la réciproque si  $n \geq 2$ . Par exemple, soit  $f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

$f$  admet un D.L. d'ordre 2 en 0 et pourtant  $f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  n'est pas continue en 0. Donc  $f$  n'est pas deux fois dérivable en 0.

### Propriété 13

$f$  admet un D.L. d'ordre 0 en  $x_0 \Leftrightarrow f$  est continue en  $x_0$  ou peut être prolongée par continuité en  $x_0$ .  
 $f$  admet un D.L. d'ordre 1 en  $x_0 \Leftrightarrow f$  est dérivable en  $x_0$ .

### Démonstration

Une partie des implications est donnée par la propriété précédente. Il reste donc à montrer :

- ( $\Rightarrow$ ) On a  $f(x) = a_0 + \varepsilon(x - x_0)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ .

D'où  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$ .

- ( $\Rightarrow$ ) On a  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ .

On a  $f$  continue en  $x_0$  et  $f(x_0) = a_0$ .

Donc  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x - x_0)$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 = f'(x_0)$

□

### Remarque 14

Si  $f$  admet un D.L. d'ordre  $n \geq 1$  en  $x_0$  alors  $f$  est continue en  $x_0$  et  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

### Propriété 15

Il y a unicité du D.L. à un ordre donné.

### Démonstration

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x - x_0)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_1(x - x_0) = 0$ .

$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x - x_0)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_2(x - x_0) = 0$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_0$ . De part l'unicité de la limite :  $a_0 = b_0$ .

On suppose  $x \neq x_0$  et on simplifie par  $(x - x_0)$ . En utilisant à nouveau la limite, on trouve  $a_1 = b_1$ .

On continue ainsi jusqu'à l'ordre  $n$ . □

### Remarque 16

Si on sait qu'une fonction est dérivable  $n$  fois en  $x_0$  et si l'on connaît son D.L. en  $x_0$  à l'ordre  $n$ , on peut donc en déduire les valeurs des dérivées successives jusqu'à l'ordre  $n$  grâce à la formule de Taylor et l'unicité du D.L..

### Propriété 17

$f$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en  $x_0 \in \mathbb{R}$  si et seulement si la fonction  $h \mapsto f(x_0 + h)$  admet un D.L. en 0.

### Exemple 18

On cherche à déterminer le D.L. en 3 de  $e^x$  à l'ordre 2.

On pose  $x = 3 + h \Leftrightarrow h = x - 3$ .

$x$  proche de 3  $\Leftrightarrow h$  proche de 0.

On a  $e^x = e^{3+h} = e^3 \times e^h = e^3 \left( 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) = e^3 \left( 1 + (x - 3) + \frac{(x - 3)^2}{2} + o(x^2) \right)$ .

### Remarque 19

Les propriétés qui vont suivre sont donc données pour les D.L. en 0. Elles peuvent se généraliser aux D.L. en un point  $x_0 \neq 0$  ou en  $\pm\infty$ .

### Définition 20

Soient  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $q \leq p$  et soit  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_pX^p$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égale à  $p$  c'est-à-dire  $P \in \mathbb{R}_p[X]$ .  
On appelle polynôme tronqué de  $P$  à l'ordre  $q$  et on note  $\text{Tr}_q(P)$  le polynôme  $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_qX^q$ .

### Remarque 21

On a donc  $\deg \text{Tr}_q(P) \leq q$  c'est-à-dire  $\text{Tr}_q(P) \in \mathbb{R}_q[X]$ .

### Propriété 22

Si  $f$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $f(x) = P(x) + o(x^n)$  et si  $s \leq n$ , alors  $f$  admet un D.L. à l'ordre  $s$  en 0 de la forme  $f(x) = \text{Tr}_s(P)(x) + o(x^s)$ .

### Remarque 23

Cela signifie que si l'on connaît le D.L. de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $n$ , on le connaît pour tout ordre inférieur.

### Exemple 24

On sait que  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ .

i.e.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

On a donc  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \left( \frac{x}{4!} + \frac{x^2}{5!} + x^2\varepsilon(x) \right)$ .

Si on pose  $\epsilon_0(x) = \frac{x}{4!} + \frac{x^2}{5!} + x^2\varepsilon(x)$ , on a bien  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_0(x) = 0$ .

## 3 Opérations sur les D.L.

### Propriété 25

Soit  $\lambda$  un réel.

Si  $f$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $f(x) = P(x) + o(x^n)$  et si  $g$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $g(x) = Q(x) + o(x^n)$  alors :

- $f + g$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $(f + g)(x) = (P + Q)(x) + o(x^n)$ .
- $\lambda f$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $(\lambda f)(x) = (\lambda P)(x) + o(x^n)$ .
- $f \times g$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $(f \times g)(x) = \text{Tr}_n(P \times Q)(x) + o(x^n)$ .
- Si de plus  $g(0) = 0$  alors  $f \circ g$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $(f \circ g)(x) = \text{Tr}_n(P \circ Q)(x) + o(x^n)$ .
- En particulier, si  $R$  est un polynôme alors  $R \circ g$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en 0 de la forme  $(R \circ g)(x) = \text{Tr}_n(R \circ Q)(x) + o(x^n)$ .

### Exemples 26

- On cherche le D.L. de  $\sin$  en  $\frac{\pi}{4}$  à l'ordre 5.

On a  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos h + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin h = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos h + \sin h)$ .

Or  $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + o(h^5)$  et  $\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + o(h^5)$ .

Donc  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + h - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} \right) + o(h^5)$ .

c'est-à-dire  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} \right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5\right)$ .

- On cherche le D.L. en 0 de  $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$  à l'ordre 3.

On a  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$

et  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ .

D'où  $f(x) = \text{Tr}_3 \left( (1 + x + x^2 + x^3) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right) + o(x^3) = 1 + x + x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ .

- On cherche le D.L. en 0 de  $f(x) = \ln(1+x^2)$  à l'ordre 4.

Si on pose  $g(x) = x^2$ , on a bien  $g(0) = 0$  et  $g(x) = x^2 + o(x^4)$ .

On a aussi  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ .

Donc  $f(x) = \text{Tr}_4 \left( x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} \right) + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ .

- On sait que  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$ .

On obtient  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$ .

On a  $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

Donc  $\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$ .

On a  $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Donc  $\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$ .

- On cherche le D.L. en 0 de  $f(x) = \arctan(\text{sh } x)$  à l'ordre 3.

On a  $\text{sh } 0 = 0$  et  $\text{sh } x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$  et  $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ .

Donc  $f(x) = \text{Tr}_4 \left( x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3} \left( x + \frac{1}{6}x^3 \right)^3 \right) + o(x^3) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

### Démonstration

On a  $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$  et  $g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ .

- On obtient  $(f+g)(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) + Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) = (P+Q)(x) + x^n (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$ .

On pose  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$ .

On a bien  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et  $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n \varepsilon(x)$ .

- On obtient  $(\lambda f)(x) = \lambda(P(x) + x^n \varepsilon_1(x)) = \lambda(P(x) + x^n (\lambda \varepsilon_1(x)))$ .

On pose  $\varepsilon(x) = \lambda \varepsilon_1(x)$ .

On a bien  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et  $(\lambda f)(x) = (\lambda P)(x) + x^n \varepsilon(x)$ . □

### Remarque 27

Si  $f$  ne s'annule pas en 0 c'est-à-dire  $f(0) = a \neq 0$  et si  $f$  admet un D.L. en 0 à l'ordre  $n$ , alors  $\frac{1}{f}$  admet un D.L. en 0 à l'ordre  $n$  qui est obtenue en considérant  $\varphi \circ (f - a)$  avec  $\varphi(t) = \frac{1}{a+t}$ .

### Exemple 28

On cherche le D.L. en 0 de  $f(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x}$  à l'ordre 3.

On a  $\cos x + \sin x = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$  et  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$ .

Donc  $f(x) = \text{Tr}_3 \left( 1 - \left( x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) + \left( x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)^2 - \left( x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)^3 \right) + o(x^3) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + x^2 - x^3 - x^3 + o(x^3) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3).$

## 4 Autres propriétés sur les D.L.

### Propriété 29

Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  ( $q \geq 1$ ).

Si  $f$  admet un D.L. en  $x_0$  à l'ordre  $n \geq q$  de la forme :

$f(x) = a_q(x - x_0)^q + a_{q+1}(x - x_0)^{q+1} + a_{q+2}(x - x_0)^{q+2} + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}(x - x_0)^n$ , alors la

fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_0)^q}$  peut être prolongée par continuité en  $x_0$ . De plus  $g$  admet un

D.L. en  $x_0$  à l'ordre  $n - q$  qui est :

$$g(x) = a_q + a_{q+1}(x - x_0) + a_{q+2}(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^{n-q} + o_{x_0}((x - x_0)^{n-q}).$$

### Remarque 30

On peut avoir  $a_q = 0$  ou  $a_q = a_{q+1} = 0$ .

### Exemple 31

On sait que  $\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + o(h^5)$  en 0.

Donc  $\frac{\sin h}{h} = 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} + o(h^4)$  en 0.

### Propriété 32

Soit  $f(x) = P(x) + o(x^n)$  le D.L. de la fonction  $f$  en 0 à l'ordre  $n$ . Alors :

- si  $f$  est une fonction paire alors tous les monômes de  $P$  sont de degré pair.
- si  $f$  est une fonction impaire alors tous les monômes de  $P$  sont de degré impair.

### Démonstration

On sait que  $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

On a donc  $f(-x) = P(-x) + (-x)^n \varepsilon(-x)$ .

Si  $f$  est paire, on a  $f(x) = P(-x) + (-x)^n \varepsilon(-x) = P(-x) + (x)^n [(-1)^n \varepsilon(-x)]$ .

On a bien  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^n \varepsilon(-x) = 0$ .

De part l'unicité du D.L. on a bien  $P(x) = P(-x)$  c'est-à-dire  $P$  paire d'où le résultat.

Le cas  $f$  impaire se résoud de la même façon.  $\square$

### Propriété 33

Soient  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$ .

Si  $f$  admet un D.L. en  $x_0$  à l'ordre  $n$  de la forme :

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ ,

alors  $F$  admet un D.L. en  $x_0$  à l'ordre  $n + 1$  de la forme :

$$F(x) = F(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1}).$$

### Exemples 34

- On cherche le D.L. en 0 de  $\ln(1 + x)$  à l'ordre 5.

Puisque  $(\ln(1 + x))' = \frac{1}{1 + x}$  et que  $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$  en 0.

Donc  $\ln(1 + x)$  admet un D.L. à l'ordre 5 en 0 qui est :  $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ .

- On cherche le D.L. en 0 de  $\arctan(x)$  à l'ordre 5.

On sait que  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$  donc  $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ .

Or  $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  et  $\arctan 0 = 0$ .

Donc  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ .

### Propriété 35

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $P'$  son polynôme dérivé. On suppose que  $f$  admet un D.L. en  $x_0$  à l'ordre  $n$  de partie principale  $P$  c'est-à-dire  $f(x) = P(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ .

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et si  $f'$  admet un D.L. en  $x_0$  à l'ordre  $n - 1$  alors la partie principale de ce D.L. est  $P'$  c'est-à-dire  $f'(x) = P'(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})$ .

### Remarque 36

- La condition  $f'$  admet un D.L. est nécessaire. En effet, si l'on reprend la fonction  $f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , on a bien que  $f$  admet un D.L. d'ordre 2 en 0. Or  $f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  n'admet pas de D.L. en 0.

- On peut donc intégrer terme à terme un D.L.

- On pourra dériver terme à terme un D.L. si c'est un développement de Taylor d'une fonction suffisamment dérivable.

### Exemple 37

On sait que la fonction  $\cos$  est infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\cos$  admet un D.L. jusqu'à l'ordre 4.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ .

On a  $\cos x = (\sin)'(x) = 1 - 3 \times \frac{x^2}{3!} + 5 \times \frac{x^4}{5!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ .

## 5 Développement limité en l'infini

### Définition 38

On suppose que  $I$  est un voisinage de  $\pm\infty$ .

On dit que  $f$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en  $+\infty$  si et seulement si la fonction  $\tilde{f}$  définie par  $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en  $0^+$ .

On suppose que  $I$  est un voisinage de  $-\infty$ .

On dit que  $f$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en  $-\infty$  si et seulement si la fonction  $\tilde{f}$  définie par  $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$  admet un D.L. à l'ordre  $n$  en  $0^-$ .

### Exemple 39

On cherche le D.L. à l'ordre 2 en l'infini de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ , on pose  $h = \frac{1}{x}$  i.e.  $x = \frac{1}{h}$ .

Si  $x$  est proche de l'infini alors  $h$  est proche de 0.

On a  $f(x) = \frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h} - 1} = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + o(h^2) = 1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .