Développements limités

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que 0 soit à l'intérieur de I et f une application de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre n en 0 si et seulement si il existe un polynôme P à coefficients réels tel que : $\deg P \leq n$ et $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x(1 + x + x\sin x)^2$.
f admet un DL en 0 à l'ordre 2.
En effet,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x[(1+x)^2 + 2(1+x)x\sin x + (x\sin x)^2] \\ &= 1 + x(1 + 2x + x^2 + 2x\sin x + 2x^2\sin x + x^2\sin^2 x) \\ &= 1 + x + 2x^2 + x^3 + 2x^2\sin x + 2x^3\sin x + x^3\sin^2 x \\ &= 1 + x + 2x^2 + x^2(x + 2\sin x + 2x\sin x + x\sin^2 x) \end{aligned}$$

On a bien $\lim\limits_{x \to 0} x + 2\sin x + 2x\sin x + x\sin^2 x = 0$.

Remarques

Lorsqu'une fonction f admet un DL à l'ordre n en 0 de la forme $P(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, le polynôme P est <u>unique</u> et est appelé partie régulière de ce DL.
Si f est paire ou impaire, il en est de même pour P.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point à l'intérieur de I et f une application de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a si et seulement si il existe un polynôme P à coefficients réels tel que : $\deg P \leq n$ et $f(a + x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Cette dernière relation étant équivalente à $f(x) = P(x - a) + (x - a)^n\varepsilon(x - a)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x - a) = 0$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1 + (x - 1)^2\sin(2\pi x)$.
f admet un DL en 1 à l'ordre 2.
En effet, si on pose $x = 1 + h$, x proche de 1 est équivalent à h proche de 0.
Et, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+h) \\ &= (1+h)^2 + 1 + (1 + h - 1)^2\sin(2\pi(1+h)) \\ &= 1 + 2h + h^2 + 1 + h^2\sin(2\pi + 2\pi h) \\ &= 2 + 2h + h^2 + h^2\sin(2\pi h) \end{aligned}$$

On a bien $\lim\limits_{h \to 0} \sin(2\pi h) = 0$.

Propriété

Une fonction f admet un DL en a si et seulement si l'application $h \mapsto f(a+h)$ admet un DL en 0.

Définition

Soient $n\in\mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $+\infty$ (resp $-\infty$) et f une application de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si la fonction f^* définie par $f^*(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un DL à l'ordre n en 0.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^2-x+3}{x^3}$.
f admet un D.L. en $+\infty$ à l'ordre 3. En effet, $f(x) = \frac{1}{x^3}\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}$
Si on pose $x = \frac{1}{h}$, x proche de $+\infty$ est équivalent à h proche de 0^+.
Et, on a : $f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right)$
$= h^3\ln(1+h)+h-h^2+3h^3 = h-h^2+3h^3+h^3\ln(1+h)$.
On a bien $\lim\limits_{h\to0}\ln(1+h) = 0$.

Théorème (Taylor-Young)

Soit n un entier, A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose qu'il existe $a\in A$ et $h > 0$ tels que $f^{(p)}(x)$ existe $\forall p \leq n-1$ et $\forall x\in\,]a-h,a+h[\subset A$
Alors $\forall x\in\,]a-h,a+h[$, $f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o((x-a)^n).$$

Remarque

Si f admet un développement de Taylor, f admet un DL (unicité).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4-2x^3-x^2+2x+1$.

f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est infiniment dérivable en 2.
f admet un développement de Taylor en 2 à l'ordre 3.

$f(x) = x^4-2x^3-x^2+2x+1$	$f(2) = 16-16-4+4+1 = 1$
$f'(x) = 4x^3-6x^2-2x+2$	$f'(2) = 32-24-4+2 = 6$
$f''(x) = 12x^2-12x-2$	$f''(2) = 48-24-2 = 22$
$f^{(3)}(x) = 24x-12$	$f^{(3)}(2) = 48-12 = 36$

D'où $f(x) = 1+6(x-2)+11(x-2)^2+6(x-2)^3+(x-2)^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to2}\varepsilon(x) = 0$.

Si on pose $x = 2 + h$, x proche de 2 est équivalent à h proche de 0.

Et, on a : $f(x) = f(2 + h)$

$= (2+h)^4 - 2(2+h)^3 - (2+h)^2 + 2(2+h) + 1$

$= (16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4) - 2(8 + 12h + 6h^2 + h^3) - (4 + 4h + h^2) + 4 + 2h + 1$

$= 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4 - 16 - 24h - 12h^2 - 2h^3 - 4 - 4h - h^2 + 4 + 2h + 1$

$= 1 + 6h + 11h^2 + 6h^3 + h^4$

$= 1 + 6h + 11h^2 + 6h^3 + h^3 \times h$

$= 1 + 6(x-2) + 11(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^3 \times (x-2)$.

Si on pose $\varepsilon(x) = x - 2$, on a bien $\lim\limits_{x\to 2} \varepsilon(x) = 0$ et on retrouve le résultat.

Propriété

Soient f et g deux fonctions admettant des DL à l'ordre n en 0 de partie régulière respective P et Q.

C'est-à-dire deg $P \leq n$ et $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

deg $Q \leq n$ et $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

(On suppose qu'il existe des intervalles de $\mathbb{R}$ où l'on puisse effectuer les opérations suivantes)

Alors

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
- $(f \times g)(x) = R(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
  où R est le polynôme obtenu de PQ en tronquant les puissances supérieur à n.
- $(f \circ g)(x) = R(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
  où R est le polynôme obtenu de PoQ en tronquant les puissances supérieur à n.
- Si $g(0) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right) = R(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
  où R est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de P par Q à l'ordre n.

Exemple

On cherche le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \dfrac{2\cos 2x \times \ln(1+x) - \sin\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)}{2 - (1+x)^2}$.

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ donc $\cos 2x = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$2\cos 2x \ln(1+x) = 2(1 - 2x^2)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + o(x^3)$

$= 2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 4x^3 + o(x^3) = 2x - x^2 - \frac{10}{3}x^3 + o(x^3)$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

Donc $\sin\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3)$.

$= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

D'où $2\cos 2x \times \ln(1+x) - \sin(x + x^2) = x - x^2 - \frac{9}{3}x^3 + o(x^3) = x - x^2 - 3x^3 + o(x^3)$.

$2 - (1+x)^2 = 2 - 1 - 2x - x^2 = 1 - 2x - x^2$

$$
\begin{array}{l|l}
x - x^2 - 3x^3 & 1 - 2x - x^2 \\ \cline{2-2}
x - 2x^2 - x^3 & x + x^2 \\
\quad x^2 - 2x^3 & \\
\quad x^2 - 2x^3 - x^4 & \\
\qquad\qquad x^4 &
\end{array}
$$

Donc $f(x) = x + x^2 + o(x^3)$.

Propriété

Si, sur un intervalle I, f admet un DL à l'ordre n en 0 de la forme $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et si f est continuement dérivable sur I, alors toute primitive F de f admet un DL à l'ordre $n + 1$ en 0 dont la partie régulière est la primitive de P dont le terme constant est $F(0)$.

Exemple

On cherche le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = (1+x)[\ln(1+x)-1]$
$f'(x) = \ln(1+x) - 1 + (1+x)\dfrac{1}{1+x} = \ln(1+x) - 1 + 1 = \ln(1+x)$.
Donc f est la primitive de $\ln(1+x)$ qui vaut -1 en 0.
Puisque $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $f(x) = -1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

Propriété

Soit f continuement dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un DL à l'ordre n en 0 de la forme $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Alors, si f' admet un DL à l'ordre $n - 1$ en 0, la partie régulière du DL de f' est P'.

Propriété

Si f admet un DL à l'ordre n en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de partie régulière P alors f est équivalent à P en a.

Exemple

On chercher à déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - x\sin x - \cos x}{x^2}$.
On n'a pas le droit d'additionner des équivalents.
Par contre, on peut le faire pour les D.L.
$1 - x\sin x - \cos x = 1 - x(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x^2\right) + o(x^2) = -\dfrac{1}{2}x^2 + o(x^é)$
Donc $\dfrac{1 - x\sin x - \cos x}{x^2} \sim -\dfrac{1}{2}$.
Et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - x\sin x - \cos x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.