Déterminants

Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un espace vectoriel sur K et n est entier naturel non nul.

1. Déterminant d'une matrice

1.1. Généralités

Définition

On définit le déterminant d'une matrice $A = (a_{i,j})_{i=1,n\ j=1,n}$ de $\mathscr{M}_n(K)$ qui sera noté

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$ par récurrence de la façon suivante :

- Si $n = 1$, on a $A = (a_{1,1})$ et $|A| = a_{1,1}$.
- Si $n \geq 2$, soit $A_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
  On pose $\det A = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} \det A_{1,2} + \ \dots\ + (-1)^n a_{1,n} \det A_{1,n}$.

Remarques

- Plus généralement, on appellera déterminant d'ordre n tout tableau de la forme précédente, sans préciser son origine (matrice, famille de vecteurs ou endomorphisme).
- Le déterminant est donc une application de $\mathscr{M}_n(K)$ dans K.

1.2. Déterminants particuliers

Propriétés

- Pour tous scalaires a, b, c, d, on a : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- Pour tous scalaires $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, on a :
  $$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b.$$

Propriété

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ une matrice triangulaire inférieure ou supérieure de $\mathscr{M}_n(K)$.
Alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (produit des coefficients diagonaux).

Exemple

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & j \end{vmatrix} = ac \begin{vmatrix} f & 0 \\ i & j \end{vmatrix} = acfj$$

Remarque

Une matrice diagonale est une matrice triangulaire supérieure.

Propriété

Soit A une matrice carrée triangulaire inférieure (ou supérieure) "par blocs".
Alors le déterminant de A est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Exemple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times a_{44} \times \begin{vmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}.$$

Propriété

Soit $A = (a_{ij})_{i = 1,\, n \;\; j = 1,\, n}$ une matrice carrée d'ordre n, de terme général $a_{ij} = x_i^{j-1}$.
Alors le déterminant de A est égal à $\prod\limits_{i<j} (x_j - x_i)$.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t).$$

1.3. Comatrice

Propriété

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ avec $n \geq 2$ et soient $C_1, C_2, \ \dots\ , C_n$ les vecteurs colonnes de A.
Le déterminant est une fonction linéaire par rapport aux colonnes.
C'est-à-dire, si $C_i = \lambda\, C'_i + \mu\, C''_i$ pour deux scalaires $\lambda, \mu \in K$, alors

$$\begin{aligned} \det A &= \det(C_1, C_2, \ \dots\ , C_i, \ \dots\ , C_n) \\ &= \det(C_1, C_2, \ \dots\ , \lambda\, C'_i + \mu\, C''_i, \ \dots\ , C_n) \\ &= \lambda \det(C_1, C_2, \ \dots\ , C'_i, \ \dots\ , C_n) + \mu \det(C_1, C_2, \ \dots\ , C''_i, \ \dots\ , C_n). \end{aligned}$$

Propriétés

- Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(K)$.
  On a $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- Le déterminant de la matrice identité est égal à 1 i.e. $\det I_n = 1$.
- Une matrice A de $\mathscr{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
  On a alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$.
- Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(K)$ et pour tout entier naturel k, on a $\det A^k = (\det A)^k$.
  Si A est inversible, cette égalité s'étend au cas des entiers négatifs.

Propriété

Toute matrice A triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls. A^{-1} est alors triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des a_{ii}.

Remarque

On a le même résultat si on remplace triangulaire supérieure par triangulaire inférieure ou par diagonale.

Rappel

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(K)$.
On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

Corollaire

Si les matrices carrées A et B sont semblables, alors elles ont le même déterminant.

Propriété

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$. Alors $\det A = \det {}^tA$.

Remarque

Les propriétés suivantes sont exprimées en termes de colonnes. Elles pourraient être exprimées à l'identique en termes de lignes via la propriété précédente.

Propriétés

- Si A contient une colonne nulle, alors $\det A = 0$.
- Si on permute deux colonnes de A, la valeur du déterminant est changée en son opposé.
  Plus généralement, si on effectue une permutation sur les colonnes de A, la valeur de du déterminant est inchangée (resp. changée en son opposé) selon que cette permutation peut se décomposer en un nombre pair (resp. impair) d'échanges de colonnes.
- On ne modifie pas la valeur de $\det A$ en ajoutant à l'une des colonnes de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A.
- La valeur de $\det A$ est nulle si et seulement si les colonnes de A sont liées.

Définition

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$, avec $n \geq 2$, de terme général a_{ij}.
Pour tout couple d'indices (i, j), on appelle mineur de a_{ij} dans A le déterminant $\det A_{i,j}$.
La quantité $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$ est appelée cofacteur du coefficient a_{ij}.
On appelle comatrice de A et on note Com A la matrice carrée d'ordre n et de terme général α_{ij}.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, alors $\text{Com}\, A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $A = (a_{i,j})_{i=1,n\ j=1,n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$, avec $n \geq 2$.
Pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$, on a $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j}$.
Cette égalité est appelée développement de det A par rapport à sa i-ème ligne.
Pour tout indice j de $\{1, \ldots, n\}$, on a $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j}$.
Cette égalité est appelée développement de $\det A$ par rapport à sa j-ème colonne.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Propriétés

- La proposition précédente peut sécrire :
  $\forall A \in \mathscr{M}_n(K)$, $A({}^t\text{Com}\, A) = ({}^t\text{Com}\, A)\, A = (\det A) I_n$.
- Si la matrice A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t\text{Com}\, A$.
  Cette formule n'a cependant qu'un intérêt assez théorique dès que $n \geq 4$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et si $ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2. Déterminant d'un endomorphisme

Définition

Soit (e) une base de E.
Soit A la matrice dans la base (e) d'une famille $(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E.
Alors $\det_e (u_1, \ldots, u_n) = \det A$.

Propriété

Si (e), (e') sont deux bases de E et si P est la matrice de passage de (e) à (e') :
$\det P = \det_e(e'_1, \dots , e'_n)$.

Propriété

Soit f un endomorphisme de E, muni d'une base $(e) = (e_1, e_2, \dots , e_n)$.
Le scalaire $\det_e(f(e_1), f(e_2), \dots , f(e_n))$ ne dépend pas de la base (e).
On l'appelle le *déterminant* de l'endomorphisme f, et on le note $\det f$.

Démonstration

Soient $(e) = (e_1, e_2, \dots , e_n)$ et $(e') = (e'_1, e'_2, \dots , e'_n)$ deux bases de E.
Il faut montrer : $\det_e(f(e_1), f(e_2), \dots , f(e_n)) = \det_{e'}(f(e'_1), f(e'_2), \dots , f(e'_n))$.
Soit φ définie sur E^n par $\varphi(u_1, u_2, \dots , u_n) = \det_{e'}(f(u_1), f(u_2), \dots , f(u_n))$.
La n-linéarité de φ résulte de la linéarité de f et de la n-linéarité de l'application $\det_{e'}$.
Le caractère alterné de φ résulte aussi de celui de l'application $\det_{e'}$
(si on échange deux vecteurs dans $(u_1, u_2, \dots , u_n)$, l'image $\varphi(u_1, u_2, \dots , u_n)$ est changée en son opposée).
Donc l'application φ est une forme n-linéaire alternée.
Puisque $\det_{e'}$ est une base de $A_n(E, K)$, il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \det_{e'}$.
Ce scalaire λ est $\det_{e'}(f(e'_1), f(e'_2), \dots , f(e'_n)) = \varphi(e'_1, e'_2, \dots , e'_n)$.
En effet, on a $\varphi(e_1, e_2, \dots , e_n) = \lambda \det_{e'}(e_1, e_2, \dots , e_n)$.
Mais, par ailleurs,

$$\begin{aligned}\varphi(e_1, e_2, \dots , e_n) &= \det_{e'}(f(e_1), f(e_2), \dots , f(e_n)) \\ &= \det_{e'}(e_1, e_2, \dots , e_n) \det_e(f(e_1), f(e_2), \dots , f(e_n))\end{aligned}$$

Dans ces deux expressions de $\varphi(e'_1, e'_2, \dots , e'_n)$, on peut simplifier par $\det_{e'}(e_1, e_2, \dots , e_n)$ qui est un déterminant non nul.
On en déduit bien que $\lambda = \det_e(f(e_1), f(e_2), \dots , f(e_n))$.

Remarque

Les applications "déterminant dans la base (e)" et "déterminant dans la base (e')" sont reliées par l'égalité $D_e = \det P\, D_{e'}$. Ce résultat est conforme à l'égalité $[u]_e = P \times [u]_{e'}$ qui relie les coordonnées dans les bases (e) et (e') d'un vecteur de E.

Propriétés

- Par définition, le déterminant d'un endomorphisme f est donc égal au déterminant dans la base (e) des images par f des vecteurs de (e), et ceci pour toute base de E.
- En particulier, le déterminant de l'application "identité" vaut 1 (car il est égal à $\det_e(e_1, e_2, \dots , e_n)$, pour une base (e) quelconque).
- Pour tout endomorphisme f, tous vecteurs $(u_1, u_2, \dots , u_n)$, et toute base (e), on a $\det_e(f(u_1), f(u_2), \dots , f(u_n)) = \det f \times \det_e(u_1, u_2, \dots , u_n)$.

Démonstration

Comme dans la démonstration de la proposition précédente, cela résulte du fait que l'application
ψ: $(u_1, u_2, \dots , u_n) \to \det_e(f(u_1), f(u_2), \dots , f(u_n))$ est n-linéaire alternée.
Il existe donc un scalaire λ tel que $\psi = \lambda \det_e$, et $\lambda = \psi(e_1, e_2, \dots , e_n) = \det f$.

Propriété

Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\det(g \circ f) = \det g \times \det f$.

Démonstration

Soit (e) une base quelconque de E.
Pour tous vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E, on a l'égalité :
$\det_e(g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_n)) = \det g \, \det_e(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
Si on pose $u_1 = f(e_1)$, $u_2 = f(e_2)$, ... , $u_n = f(e_n)$, on trouve :
$\det(g \circ f) = \det_e(g[f(e_1)], \dots, g[f(e_n)]) = \det g \times \det_e(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det g \times \det f$.

Propriété

Soit f un endomorphisme de E.
L'application f est un automorphisme si et seulement si son déterminant est non nul.
On a alors $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f} = (\det f)^{-1}$.

Démonstration

Soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Par définition, $\det f = \det_e(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.
Or f est un automorphisme de E
$\Leftrightarrow$ f transforme la base (e) en une autre base de E
$\Leftrightarrow$ les $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ sont libres
$\Leftrightarrow$ leur déterminant dans la base (e) est non nul : c'est ce qu'il fallait démontrer.
Si f est un automorphisme de E, alors $\det f^{-1} \det f = \det(f^{-1} \circ f) = \det \mathrm{Id}_E = 1$.

Propriété

Soit f un endomorphisme de E et p un entier naturel.
Alors on a $\det(f^p) = (\det f)^p$.
Ce résultat se généralise aux entier p négatifs si f est un automorphisme (f inversible).

Démonstration

Pour tous endomorphismes f et g de E, on sait que $\det(g \circ f) = \det g \, \det f$.
On en déduit par une récurrence évidente que $\det(f_p \circ \dots \circ f_2 \circ f_1) = \prod_{k=1}^{p} \det f_k$.
L'égalité $\det(f^p) = (\det f)^p$ est un cas particulier de ce résultat.
Si f est un automorphisme, on applique ce qui précède à f^{-1}, ce qui donne le résultat pour les exposants négatifs.