

# Ensembles et applications

## 1. Expressions mathématiques

Les mathématiciens ont voulu longtemps utiliser le langage courant pour décrire leur théorie. Toutefois, la construction de nouveaux objets mathématiques et la complexité croissante des raisonnements ont montré la limite de cette utilisation.

Il fallut donc inventer des langages formalisés.

De façon rapide, on se donne un nombre restreint de sigles :

- # Objets mathématiques :  $a, b, f, M, 0, 1, \mathcal{S}(E, F), \{a, b\}, \dots$
- # Quantificateurs :  $\forall, \exists, \exists!$ .
- # Signes logiques : ET, OU, non( ) ou  $\bar{\quad}$ ,  $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \dots$
- # Signes spécifiques :  $<, \infty, \rightarrow, \in, \cup, |, \emptyset, \approx, \dots$

et, avec ces sigles mathématiques, on formule des assertions qui prennent des valeurs vraies ou fausses.

On aura, entre autres, à passer du langage courant au langage formalisé et inversement.

Par exemple : - Le carré d'un nombre réel est positif ou nul.

$$- \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

Puis, pour créer des raisonnements avec ces assertions, on utilise des règles de logique formelle.

## 2. Logique formelle

### 2.1 La négation

Soit  $P$  une proposition, on définit son contraire noté  $\bar{P}$ ,  $\text{non}(P)$  ou  $\neg P$  dont la véracité est donnée par les tableaux suivants :

$P$	$\text{non}(P)$
$V$	$F$
$F$	$V$

$P$	$\text{non}(P)$
1	0
0	1

#### Exemple 2.1

$A$  : La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle.

$\text{non}(A)$  : Il existe deux nombres irrationnels dont la somme est rationnelle.

Le lecteur pourra déterminer la véracité de ces propositions.

## Remarque 2.2

Cela n'a pas été démontré, mais on pense que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire. C'est-à-dire qu'une proposition est soit vraie, soit fausse.

Néanmoins, avec des notions que nous reverrons plus tard, il existe des paradoxes dont le paradoxe de Russell. En 1905, Bertrand Russell montre que la notion d'"ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes" est contradictoire. Pour mettre ce paradoxe en évidence, on suppose que les ensembles peuvent se partager en deux parties  $A = \{X \text{ ensemble} / X \in X\}$  et  $B = \{X \text{ ensemble} / X \notin X\}$ . Posons-nous la question : A-t-on  $B \in B$  ou bien  $B \notin B$ ?

Si  $B \in B$ , alors  $B$  devrait vérifier la condition  $X \notin X$ , absurde.

Si  $B \notin B$ , alors  $B$  ne devrait pas vérifier la condition  $X \notin X$ .

Il est donc interdit de parler de "l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes" et, à fortiori, de l'ensemble de tous les ensembles.

Ce paradoxe est à rapprocher du paradoxe célèbre du menteur, où le problème est de savoir si l'homme qui dit : "Je mens" dit ou non la vérité en prononçant ces paroles.

## 2.2 La disjonction

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions, on définit une nouvelle proposition  $A \vee B$ , lue  $A$  ou  $B$ , dont la véracité est donnée par les tableaux suivants :

$A$	$B$	$A \vee B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

### Exemple 2.3

$A$  : Il fait beau.

$B$  : Il fait chaud.

$A \vee B$  est vraie si  $A$  est vraie ou si  $B$  est vraie de façon non exclusive (les deux propositions peuvent être vraies). Il y a donc ici une légère différence avec le "ou" utilisé couramment (fromage ou dessert).

### Remarques 2.4

- En résumé, si l'une au moins des relations  $A$  ou  $B$  est vraie, alors  $A \vee B$  est vraie.
- $A \vee B$  est équivalent à  $B \vee A$  (on dit que le "ou" est commutatif).

## 2.3 La conjonction

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions, on définit une nouvelle proposition  $A \wedge B$ , lue  $A$  et  $B$ , dont la véracité est donnée par les tableaux suivants :

$A$	$B$	$A \wedge B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

$A$	$B$	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

## Exemple 2.5

$A : x$  est un réel non nul.       $B : x$  est un imaginaire pur.

La proposition  $A \wedge B$  est toujours fausse.

## Remarques 2.6

- On peut aussi définir la conjonction de la façon suivante :  $\text{non}(\text{non}(A) \vee \text{non}(B))$

$A$	$B$	$\text{non}(A)$	$\text{non}(B)$	$\text{non}(A) \vee \text{non}(B)$	$\text{non}(\text{non}(A) \vee \text{non}(B))$	$A \wedge B$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$

- $A \wedge B$  est équivalent à  $B \wedge A$  (on dit que le "et" est commutatif).

## 2.4 L'implication

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions, la relation  $((\text{non}(A) \vee B))$  est appelée l'implication de  $B$  par  $A$ , notée  $A \Rightarrow B$  et possède donc le tableau de vérité suivant :

$A$	$B$	$\text{non}(A)$	$\text{non}(A) \vee B$
$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$

## Remarques 2.7

- On remarque que, si  $A$  est vraie,  $A \Rightarrow B$  est vraie seulement lorsque  $B$  est vraie. On a aussi que, si  $A$  est fausse,  $A \Rightarrow B$  est vraie indépendamment de la valeur de vérité de  $B$ .
- Dans un langage plus usuel, l'implication  $A \Rightarrow B$ , correspond à : si  $A$  alors  $B$ . Toutefois ce "Si ..., alors ..." diffère de celui du langage courant car celui-ci a plus une valeur d'équivalence. Par exemple pour l'expression : "S'il pleut, j'irai au cinéma", en logique formelle, on ne peut rien conclure s'il ne pleut pas.

## Propriétés 2.9

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions, on a :

- $A \Rightarrow A$ .
- $A \Rightarrow (A \vee B)$ .

## Démonstration

On doit vérifier que ces relations sont toujours vraies indépendamment de valeurs de vérité de  $A$  ou  $B$ .

$A$	$\text{non}(A)$	$\text{non}(A) \vee A$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$

$A$	$B$	$\text{non}(A)$	$A \vee B$	$\text{non}(A) \vee (A \vee B)$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$F$	$V$

## Définition 2.10

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

L'application  $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$  est appelée contraposée de l'implication  $A \Rightarrow B$ .

## Propriété 2.11

Une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.

## Démonstration

$A$	$B$	$\text{non}(A)$	$\text{non}(B)$	$\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$	$A \Rightarrow B$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

## 2.5 L'équivalence

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions, on dit que  $A$  et  $B$  sont équivalentes et on note  $A \Leftrightarrow B$  si et seulement si les implications  $A \Rightarrow B$  et  $B \Rightarrow A$  sont vraies.

On obtient alors le tableau de vérité suivant :

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$

## Remarques 2.12

- Deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes valeurs de vérité simultanément.
- Dans un langage plus courant, l'équivalence  $A \Leftrightarrow B$ , correspond à :  $A$  si et seulement si  $B$ .

## 2.6 Propriétés fondamentales

### Propriété 2.13

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions,

- $\text{non}(A \vee B) \Leftrightarrow \text{non}(A) \wedge \text{non}(B)$
- $\text{non}(A \wedge B) \Leftrightarrow \text{non}(A) \vee \text{non}(B)$

## Démonstration

$A$	$B$	$\text{non}(A)$	$\text{non}(B)$	$A \vee B$	$\text{non}(A \vee B)$	$\text{non}(A) \wedge \text{non}(B)$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$

$A$	$B$	$\text{non}(A)$	$\text{non}(B)$	$A \wedge B$	$\text{non}(A \wedge B)$	$\text{non}(A) \vee \text{non}(B)$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$

### Remarque 2.14

Ces propriétés peuvent s'écrire sous les formes  $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$  et  $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$  dont la notation ressemble à des résultats similaires sur les ensembles.

### Propriété 2.15

Soient  $A, B$  et  $C$  trois propositions.

- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

### Démonstration

$A$	$B$	$C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

$A$	$B$	$C$	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

### Remarque 2.16

Par commutativité, on obtient :

$$(B \vee C) \wedge A \Leftrightarrow (B \wedge A) \vee (C \wedge A) \text{ et } (B \wedge C) \vee A \Leftrightarrow (B \vee A) \wedge (C \vee A).$$

On dit que le "et" est distributif par rapport au "ou" et que le "ou" est distributif par rapport au "et".

### Propriété 2.17

Soient  $A, B$  et  $C$  trois propositions.

- $A \Leftrightarrow \text{non}(\text{non}(A))$
- $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

## Démonstration

$A$	$B$	$C$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

## 2.7 Exemples de différents types de raisonnement

- **Le raisonnement direct :**

On veut montrer que, si  $n$  est un entier pair, alors  $n^2$  est un entier pair.

Cela donne en termes mathématiques :  $n$  pair  $\Rightarrow n^2$  pair

# Si  $n$  n'est pas pair (i.e. impair), l'implication est toujours vraie. Il n'y a donc rien à montrer.

# Pour savoir si cette implication est vraie, il faut vérifier que si ( $n$  pair) est vraie alors ( $n^2$  pair) est vraie.

$$\begin{aligned} n \text{ pair} &\Leftrightarrow n = 2k && \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n^2 = 4k^2 && \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow n^2 \text{ pair.} \end{aligned}$$

- **Le raisonnement par contraposition :**

On veut montrer l'expression :  $n$  est un entier pair si et seulement si  $n^2$  est un entier pair.

Cela donne en termes mathématiques :  $n$  pair  $\Leftrightarrow n^2$  pair.

Nous avons déjà montrer  $n$  pair  $\Rightarrow n^2$  pair, il reste donc  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  pair.

On va montrer la contraposée :  $\text{non}(n \text{ pair}) \Rightarrow \text{non}(n^2 \text{ pair})$  i.e.  $n$  impair  $\Rightarrow n^2$  impair.

$$\begin{aligned} n \text{ impair} &\Leftrightarrow n = 2k + 1 && \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 && \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow n^2 \text{ impair.} \end{aligned}$$

- **Le raisonnement par l'absurde :**

On veut montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

On suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel c'est-à-dire qu'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  que l'on peut supposer non nuls tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

De plus, on suppose que cette fraction est irréductible (c'est une restriction qui ne fait pas perdre de généralité au raisonnement).

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{p}{q} &\Rightarrow p^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow p^2 \text{ pair} \\ &\Rightarrow p \text{ pair} \\ &\Rightarrow p = 2p' && \text{avec } p' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (2p')^2 = 2q^2 \\ &\Rightarrow q^2 = 2p'^2 \\ &\Rightarrow q^2 \text{ pair} \\ &\Rightarrow q \text{ pair} \\ &\Rightarrow q = 2q' && \text{avec } q' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ce qui signifierait que la fraction est réductible : contraire aux hypothèses.

Il existe d'autres types de raisonnement que nous verrons au cours de cette année (ou des suivantes).



Il est coutume de représenter les éléments et les ensembles par des lettres de l'alphabet latin ou grec. Le plus souvent les éléments sont désignés par des lettres minuscules et les ensembles par des lettres majuscules. Rien n'oblige à respecter cette convention et cela devient impossible dans le cas des ensembles d'ensembles.

On dira qu'un élément  $a$  appartient à un ensemble  $E$  et on notera  $a \in E$  pour exprimer le fait que l'élément  $a$  fait partie de cette collection. La négation de cette relation est notée  $a \notin E$ .

### Définition 4.2

$a = b$  signifie que  $a$  et  $b$  sont des représentations du même objet mathématique.

### Remarque 4.3

Il faut se méfier de cette définition "trop simple" de l'égalité. Nous aurons au fil de ce cours à définir des égalités : celle des ensembles, des fonctions, des suites, des polynômes, des fractions rationnelles ...

### Définition 4.4

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, on dira que  $F$  est inclus dans  $E$  et on notera  $F \subset E$  pour exprimer la relation :  $\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E$ .

### Remarques 4.5

- Si  $F \subset E$ , on dit que  $F$  est une partie ou un sous-ensemble de  $E$ .
- On notera  $F \not\subset E$  pour exprimer que  $F$  n'est pas un sous-ensemble de  $E$ .  
C'est-à-dire si  $\exists x / x \in F$  et  $x \notin E$ .
- On notera  $F \subsetneq E$  pour exprimer que  $F$  est un sous-ensemble de  $E$  différent de  $E$ .  
C'est-à-dire si  $(\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E)$  et  $(\exists x / x \notin F$  et  $x \in E)$ .
- $E \subset E$ .

### Définition 4.6

On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux si et seulement si on a, à la fois,  $E \subset F$  et  $F \subset E$ .

### Remarques 4.7

On pourra aussi utiliser :

$E = F$  si et seulement si  $\forall x, x \in F \Leftrightarrow x \in E$ .

### Propriété 4.8

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles.

On a :  $(E \subset F$  et  $F \subset G) \Rightarrow E \subset G$ .

### Démonstration

Si  $E \subset F$ , alors  $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$ .

Si  $F \subset G$ , alors  $\forall x, x \in F \Rightarrow x \in G$ .

D'après la propriété 2.15 b, on a  $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ .

Donc, si  $E \subset F$  et  $F \subset G$ , on obtient  $x \in E \Rightarrow x \in G$  c'est-à-dire le résultat.

## Définition 4.9

Soient  $E$  un ensemble et  $A(x)$  une relation.

Il existe un seul ensemble  $F$  qui vérifie l'équivalence :  $\forall x, x \in F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } A(x))$  équivalence que l'on pourra exprimer par l'égalité  $F = \{x \in E / A(x)\}$ .

## Exemple 4.10

$\{\text{entiers naturels pairs}\} = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\} = 2\mathbb{N}$ .

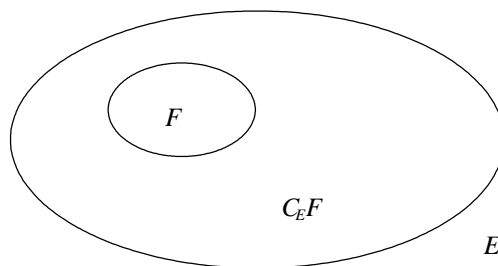
## Définition 4.11

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles tels que  $F \subset E$ .

On appelle complémentaire de  $F$  dans  $E$  et on note  $C_E F$  l'ensemble :  $\{x \in E / x \notin F\}$ .

## Remarques 4.12

- Schématiquement cela donne :



- Nous avons :  $x \in C_E F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin F)$ .  
Mais en pratique, on utilise plutôt :  $x \in C_E F \Leftrightarrow x \notin F$  et  $x \notin C_E F \Leftrightarrow x \in F$ .
- On rencontre parfois la notation  $\bar{F}$  pour  $C_E F$ .  
Avantages : Calculs plus simples dans les expressions, similitude avec les formes logiques.  
Inconvénients : Pas unicité de l'ensemble de référence, similitude avec les formes logiques.
- On pourra utiliser  $E \setminus F$  (dont nous verrons la définition un peu plus loin) pour  $C_E F$ .

## Exemple 4.13

Soient  $E = \mathbb{N}$ ,  $F = \mathbb{Z}$  et  $G = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{n \in \mathbb{Z} / n > 2\}$ .

On a  $C_E G = \{0; 1; 2\}$  et  $C_F G = \{n \in \mathbb{Z} / n \leq 2\}$ .

Par exemple,  $-1 \notin C_E G$  alors que  $-1 \in C_F G$ .

## Propriété 4.14

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles tels que  $F \subset E$ . On a  $C_E(C_E F) = F$ .

## Remarque 4.15

On peut aussi écrire cette propriété  $\overline{\overline{F}} = F$ .

## Démonstration

$$x \in C_E(C_E F) \Leftrightarrow x \notin C_E F \Leftrightarrow x \in F.$$

## Propriété 4.16

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

Si  $A \subset B$ , alors  $C_E B \subset C_E A$ .

### Démonstration

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x, x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A.$$

## Propriété - définition 4.17

Il existe un ensemble unique, appelé ensemble vide et noté  $\emptyset$  tel que  $\forall x, x \notin \emptyset$ .

### Démonstration

Soit  $E$  un ensemble.

Si on prend  $\emptyset = C_E E$ , on a, par définition,  $C_E E = \{x \in E / x \notin E\}$ .

On montre, en raisonnant par l'absurde, que  $C_E E$  ne contient aucun élément.

De plus pour tout ensemble  $F$ , on a  $\forall x, x \in \emptyset \Rightarrow x \in F$  donc  $\emptyset \subset F$ .

D'où l'unicité.

## Remarque 4.18

On a aussi  $C_E \emptyset = E$ .

## Définition 4.19

Soit  $E$  un ensemble.

On admet l'existence de l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  qui vérifie l'équivalence :  $X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$ .

$\mathcal{P}(E)$  est l'ensemble des parties de  $E$ .

## Exemple 4.20

Si  $E = \{a, b\}$ , on a  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ .

## Remarques 4.21

- Pour tout ensemble  $E$ ,  $\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$  car  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$  et  $E \in \mathcal{P}(E)$ .
- On a  $\{a\} \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow \{a\} \subset E \Leftrightarrow a \in E$ .

## Définition 4.22

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ .

On appelle intersection de  $A$  et de  $B$  et on note  $A \cap B$  l'ensemble  $\{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ .

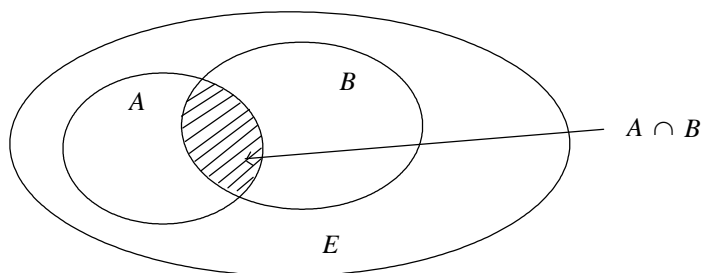
## Exemple 4.23

Soit  $A = \{\text{multiples entiers (positifs) de } 2\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$  et soit  $B = \{3n, n \in \mathbb{N}\}$ .

On a  $A \cap B = \{6n, n \in \mathbb{N}\}$ .

## Remarques 4.24

- Schématiquement, cela donne :



- $A \cap B$  est constitué des éléments communs à l'ensemble A et à l'ensemble B.
- En pratique,  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$  et  $x \in B$ .

## Propriétés 4.25

Soit  $E$  un ensemble.

Soient  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

- $A \cap B \in \mathcal{P}(E)$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap E = E \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$

On dit que  $(\mathcal{P}(E), \cap)$  est un monoïde commutatif.

## Propriétés 4.26

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
- $C \subset A$  et  $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$
- $A \cap C_E A = \emptyset$

## Définition 4.27

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont disjoints si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

## Définition 4.28

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ .

On appelle réunion (ou plus simplement union) de  $A$  et de  $B$  et on note  $A \cup B$  l'ensemble défini par :  $\{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ .

## Exemple 4.29

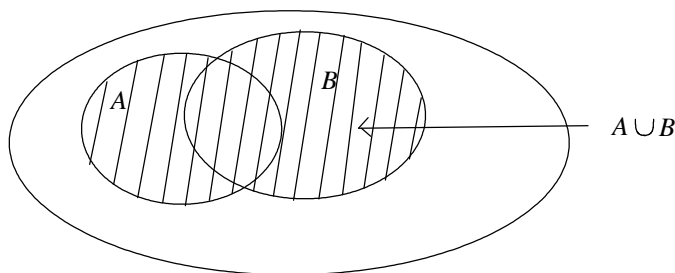
Soient  $A = \mathbb{R}$  et  $B = \{\text{imaginaires purs de } \mathbb{C}\}$ .

Dans le plan complexe, les images des complexes de  $A \cup B$  sont les points des deux axes.

Attention,  $A \cup B \neq \mathbb{C}$  qui correspond à  $A + B$  que nous verrons par la suite .

## Remarques 4.30

- Schématiquement, cela donne :



- En pratique,  $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$  ou  $x \in B$ .
- $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$  et  $B = \emptyset$ .

## Propriétés 4.31

Soit  $E$  un ensemble. Soient  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

- $A \cup B \in \mathcal{P}(E)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$

On dit que  $(\mathcal{P}(E), \cup)$  est un monoïde commutatif.

## Propriétés 4.32

Soit  $E$  un ensemble. Soient  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

- $A \cup E = E$
- $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
- $A \subset C$  et  $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$
- $A \cup C_E A = E$

## Propriétés 4.33 (Distributivité et lois de De Morgan)

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$
- $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

## Remarques 4.34

- On pourra utiliser les formules  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  et  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  avec les précautions que cela nécessite.
- Soit  $E$  un ensemble. Soient  $A, B, C$  et  $D \in \mathcal{P}(E)$ . On a :  
 $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$  et  
 $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$ .

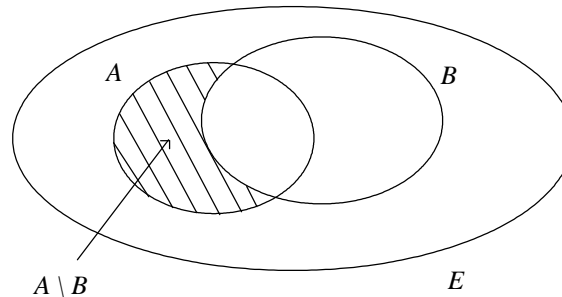
### Définition 4.35

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ .

On définit la différence de  $A$  et de  $B$  notée  $A \setminus B$  par  $A \setminus B = A \cap C_E B$ .

### Remarques 4.36

- Schématiquement cela donne :



- On a  $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$ .
- En pratique,  $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$ .
- On peut aussi définir  $A \setminus B$  par  $A \setminus B = C_A B$  sans se soucier de savoir si  $B \subset A$ .

### Propriété 4.37

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

- $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
- $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$
- $A \setminus A = \emptyset$

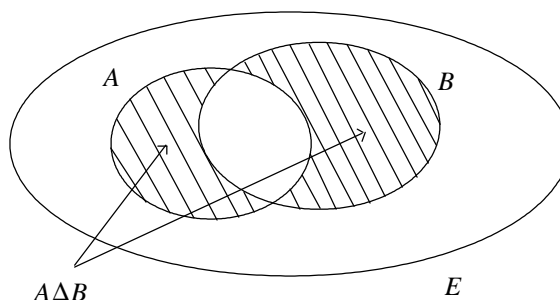
### Définition 4.38

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ .

On appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$  et on note  $A \Delta B$  l'ensemble  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

### Remarques 4.39

- Schématiquement cela donne :



- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

### Propriétés 4.40

Soit  $E$  un ensemble et soient  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ .

- $A \Delta B \in \mathcal{P}(E)$
- $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$

- $A \Delta A = \emptyset$
- $A \Delta B = B \Delta A$

On dit que  $(\mathcal{P}(E), \Delta)$  est un groupe commutatif.

### Remarque 4.41

Si maintenant on considère l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  muni des opérations de différence symétrique et d'intersection, on obtient une structure d'anneau de Boole.

En effet, comme nous l'avons vu, la différence symétrique donne une structure de groupe commutatif à  $\mathcal{P}(E)$  et l'intersection donne à  $\mathcal{P}(E)$  une structure de monoïde commutatif.

Il reste donc à vérifier la distributivité.

Si  $E$  est un ensemble et si  $A, B$  et  $C \in \mathcal{P}(E)$ , on a :

$$A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) = ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B).$$

### Définition 4.42

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

On appelle produit cartésien (ou simplement produit) de  $E$  par  $F$  et on note  $E \times F$  l'ensemble des couples ordonnés  $(x,y)$  où  $x \in E$  et  $y \in F$ .

### Remarques 4.43

- On a donc  $E \times F = \{(x,y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$ .
- $u \in E \times F \Leftrightarrow \exists x \in E \text{ et } \exists y \in F / u = (x,y)$ .
- On définit l'égalité sur  $E \times F$  par  $(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$ .
- On a  $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset$ .
- On peut définir de façon récursive le produit d'un nombre d'ensembles supérieur à 2.  
 $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$  est l'ensemble des n-uples  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $x_i \in F_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
- On note aussi  $E^2$  pour  $E \times E$ . De même,  $E^3 = E \times E \times E$  etc. Par exemple,  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- Si  $c = (a,b) \in E \times F$ , alors  $a$  est appelé première projection de  $c$  noté  $pr_1(c)$  ou  $pr_E(c)$ .  
 $b$  est appelé deuxième projection de  $c$  noté  $pr_2(c)$  ou  $pr_F(c)$ .

### Propriété 4.44

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soient  $A, A' \in \mathcal{P}(E)$  et  $B, B' \in \mathcal{P}(F)$ .

- $(A \cup A') \times B = (A \times B) \cup (A' \times B)$
- $(A \cap A') \times B = (A \times B) \cap (A' \times B)$
- $A \times (B \cup B') = (A \times B) \cup (A \times B')$
- $A \times (B \cap B') = (A \times B) \cap (A \times B')$
- $A \subset A' \text{ et } B \subset B' \Leftrightarrow A \times B \subset A' \times B'$

### Définition 4.45

Soit  $E$  un ensemble.

On appelle diagonale de  $E \times E$  l'ensemble des couples  $(x,x)$  où  $x \in E$ .

## 5. Fonctions

Nous allons maintenant nous intéresser à des sous ensembles particuliers du produit cartésien de deux ensembles : les relations et les fonctions.

### Définition 5.1

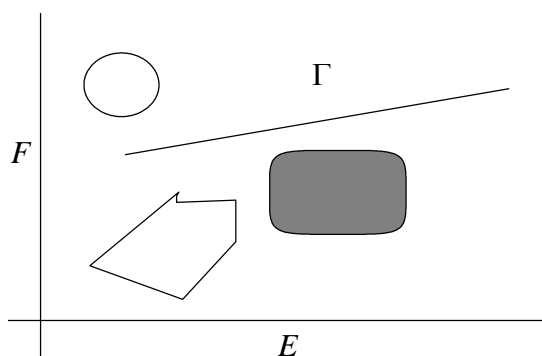
Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

On appelle graphe de  $E$  vers  $F$  toute partie de  $E \times F$ .

On appelle correspondance tout triplet  $(\Gamma, E, F)$  où  $\Gamma$  est un graphe de  $E$  vers  $F$ .

$E$  est alors appelé ensemble de départ et  $F$  ensemble d'arrivée de la correspondance.

### Exemple 5.2



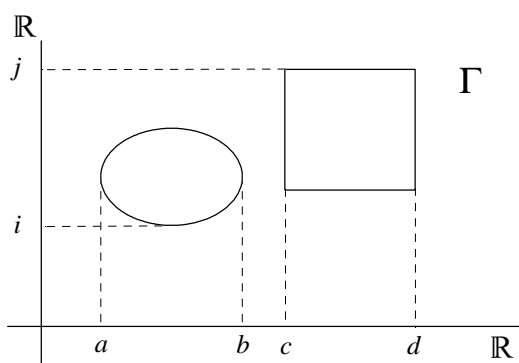
### Définition 5.3

Soit  $\gamma = (\Gamma, E, F)$  une correspondance.

On appelle ensemble de définition de  $\gamma$  et on note  $D_\gamma$  l'ensemble  $\{x \in E / \exists y \in F \text{ tel que } (x, y) \in \Gamma\}$

On appelle ensemble image de  $\gamma$  et on note  $\text{Im } \gamma$  l'ensemble  $\{y \in F / \exists x \in E \text{ tel que } (x, y) \in \Gamma\}$

### Exemple 5.4



$$\begin{aligned} \gamma &= (\Gamma, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ D_\gamma &= [a, b] \cup [c, d] \\ \text{Im } \gamma &= [i, j] \end{aligned}$$

### Définition 5.5

Soit  $\gamma = (\Gamma, E, F)$  une correspondance.

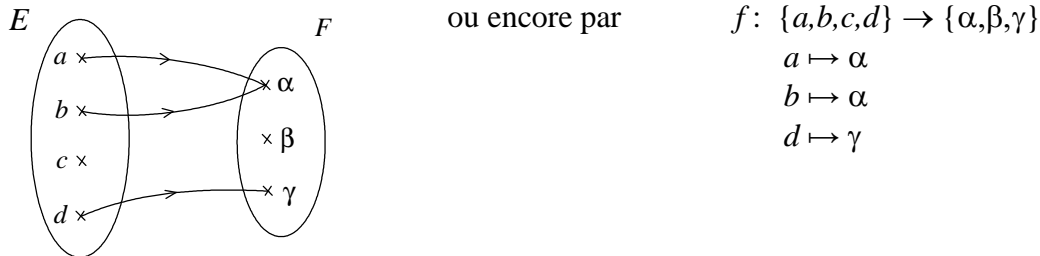
On dit que  $\Gamma$  est un graphe fonctionnel si et seulement si  $\forall x_0 \in E$ , l'ensemble  $\{y \in F \text{ tel que } (x_0, y) \in \Gamma\}$  est vide ou réduit à un seul élément.

Dans ce cas, on dit que  $\gamma$  est une fonction de  $E$  vers  $F$ .

Si, de plus,  $D_\gamma = E$ , alors on dit que  $\gamma$  est une application de  $E$  vers  $F$ .

## Remarques 5.6

- Soit  $f = (\Gamma, E, F)$  une fonction de  $E$  vers  $F$ .  
Si  $(x, y) \in \Gamma$ , on dit que  $y$  est l'image (unique) de  $x$  par  $f$  et que  $x$  est un antécédent de  $y$  par  $f$ .
- Si  $f = (\Gamma, E, F)$  une fonction de  $E$  vers  $F$ , on note  $f : E \rightarrow F$ .  
Si  $(x, y) \in \Gamma$ , on note  $f(x) = y$ .
- On peut représenter la fonction  $\{(a, \alpha), (b, \alpha), (d, \gamma)\}, E, F$  où  $E = \{a, b, c, d\}$  et  $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  par



## Exemples 5.7

Soient  $E$  un ensemble,  $F$  une partie de  $E$  et  $a$  un élément de  $F$ .

- $\text{Id}_E : E \rightarrow E; x \mapsto x$  est appelée application identique ou identité de  $E$ .
- $j : F \rightarrow E; x \mapsto x$  est appelée injection canonique.
- $f : E \rightarrow F; x \mapsto a$  est appelée une application constante. Par abus, on note  $f = a$ .

## Remarques 5.8

- Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.  
L'ensemble des fonctions de  $E$  vers  $F$  est généralement noté  $\mathcal{F}(E, F)$ .  
L'ensemble des applications de  $E$  vers  $F$  est généralement noté  $\mathcal{A}(E, F)$  ou  $F^E$ .
- Une fonction est une application sur son ensemble de définition.  
Par exemple,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction alors que  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est une application.  
$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{x}$$

## Définition 5.9

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $E$  vers  $F$  (où  $E$  et  $F$  sont deux ensembles).

On dit que  $f$  est égale à  $g$  (sur  $E$ ) et on note  $f = g$  pour exprimer la relation :  $\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$ .

## Définition 5.10

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  (où  $E$  et  $F$  sont deux ensembles).

Soient  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $B \in \mathcal{P}(F)$ .

On appelle image directe de  $A$  par  $f$  et on note  $f(A)$  l'ensemble  $\{y \in F / \exists x \in A \text{ et } y = f(x)\} = \{f(x) / x \in A\}$ .

On appelle image réciproque de  $B$  par  $f$  et on note  $f^{-1}(B)$  l'ensemble  $\{x \in E / f(x) \in B\}$ .

## Remarques 5.11

- En pratique,  $x \in f(A) \Leftrightarrow \exists t \in A / x = f(t)$   
 $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$
- On ne parle pas encore d'application réciproque.
- On a bien  $\{f(a)\} = f(\{a\})$  mais attention en général  $\{f^{-1}(b)\} \neq f^{-1}(\{b\})$ .
- On a en particulier que l'ensemble  $f(E)$  est l'ensemble image de  $f$ .  
C'est-à-dire  $f(E) = \text{Im}f$ .

## Propriétés 5.12

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  (où  $E$  et  $F$  sont deux ensembles).

Soient  $A, A' \in \mathcal{P}(E)$  et  $B, B' \in \mathcal{P}(F)$ .

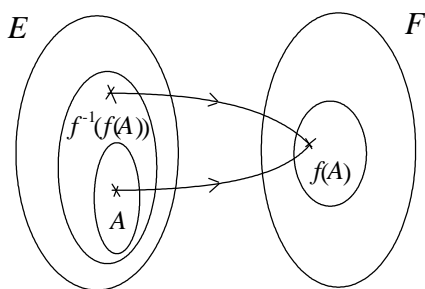
- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$
- $A \subset f^{-1}(f(A))$
- $f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B)$

## Démonstration

- $$\begin{aligned} f(A \cup A') &= \{y \in F / \exists x \in A \cup A' \text{ et } y = f(x)\} \\ &= \{y \in F / (\exists x \in A \text{ ou } \exists x \in A') \text{ et } y = f(x)\} \\ &= \{y \in F / (\exists x \in A \text{ et } y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in A' \text{ et } y = f(x))\} \\ &= \{y \in F / \exists x \in A \text{ et } y = f(x)\} \cup \{y \in F / \exists x \in A' \text{ et } y = f(x)\} \\ &= f(A) \cup f(A'). \end{aligned}$$

- Soit  $x \in A$ ,  $f(x) \in f(A)$  et donc  $x \in f^{-1}(f(A))$

On n'a pas l'égalité car, par exemple, on peut avoir ce genre de situation :



## Définition 5.13

Soit  $f: E \rightarrow E$  et soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ .

On dit que  $A$  est stable par  $f$  si et seulement si  $f(A) \subset A$ .

On dit que  $A$  est invariant par  $f$  si et seulement si  $f(A) = A$ .

## Exemples 5.14

- $[-1, 1]$  est stable par la fonction sinus ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$ ).
- $\mathbb{R}_+$  est invariant par la fonction carré ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ ).

## Définition 5.15

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

On dit que  $f$  est surjective ou est une surjection si et seulement si  $\text{Im}f = F$  i.e  $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$ .

On dit que  $f$  est injective ou est une injection si et seulement si,  $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ .

On dit que  $f$  est bijective ou est une bijection si et seulement si elle est, à la fois, injective et surjective.

## Remarques 5.16

- Soit  $f: E \rightarrow F$ .  
 $f$  est surjective si et seulement si tout élément de  $F$  possède au moins un antécédent.  
 $f$  est injective si et seulement si tout élément de  $F$  possède au plus un antécédent.  
 $f$  est bijective si et seulement si tout élément de  $F$  possède exactement un antécédent.
- Dans la pratique, pour montrer qu'une fonction est surjective, le plus souvent, on détermine exactement un antécédent.  
Par exemple, pour la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$   
$$x \mapsto x^2.$$
- Dans la pratique, pour montrer qu'une fonction est injective, le plus souvent on utilise la contraposée de la définition :  $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ .  
Par exemple, pour la fonction  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$   
$$x \mapsto x^2.$$
- La fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est ni injective ni surjective.  
$$x \mapsto x^2$$
  
En effet,  $-1$  n'a pas d'antécédent par  $f$  et  $f(-2) = f(2)$ .
- Soit  $E$  un ensemble.  
Les bijections de  $E$  dans  $E$  sont appelés des permutations.  
L'ensemble des permutations de  $E$  est noté  $S(E)$ .  
Le terme "permutation" correspond au terme du langage courant lorsque  $E$  est fini.

## Exemples 5.17

- La fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]; x \mapsto \sin x$  n'est pas injective car, par exemple,  $\sin 0 = \sin 2\pi$  mais elle est surjective.
- La fonction  $f: [0, \pi/2] \rightarrow [-1,1]; x \mapsto \sin x$  n'est pas surjective car, par exemple,  $-1$  n'a pas d'antécédent mais elle est injective.
- La fonction  $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1,1]; x \mapsto \sin x$  est une bijection.
- La fonction  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; n \mapsto n + 2$  est une permutation de  $\mathbb{Z}$ .

## Remarque 5.18

En particulier, pour tout ensemble  $E$ , la fonction  $\text{Id}_E$  est une bijection de  $E$ .

## Propriétés 5.19

Soit  $f: E \rightarrow F$ . Soient  $A, A' \in \mathcal{P}(E)$  et  $B, B' \in \mathcal{P}(F)$ .

Si  $f$  est injective, on a  $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ .

Si  $f$  est surjective, on a  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

Si  $f$  est injective, on a  $A = f^{-1}(f(A))$ .

## Définition 5.20

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $E$  dans  $F = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On appelle somme usuelle des fonctions et on note  $f + g$  l'application définie par  $f + g: E \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

On appelle produit usuel des fonctions et on note  $f \times g$  l'application définie par  $f \times g: E \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x) \times g(x)$$

## Remarque 5.21

On a donc, pour tout  $x$ ,  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  et  $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ .

## Définition 5.22

Soient  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  et  $g$  une application de  $F$  vers  $G$ . On appelle composée de  $g$  et de  $f$  et on note  $g \circ f$  l'application de  $E$  vers  $G$  qui à tout  $x$  de  $E$  associe  $g(f(x))$ .

## Remarques 5.23

- En général,  $g \circ f \neq f \circ g$ .  
Par exemple si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
$$x \mapsto 2x + 1 \qquad x \mapsto 3x$$
alors  $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
$$x \mapsto 6x + 3 \qquad x \mapsto 6x + 1$$
  
On a  $(g \circ f)(0) = 3 \neq 1 = (f \circ g)(0)$ .
- Les définitions précédentes peuvent être étendues aux fonctions avec toutes les précautions que cela nécessite.
- On note parfois  $fg$  pour  $f \times g$ .  
Mais, attention,  $f^2$  peut signifier  $f \times f$  mais aussi  $f \circ f$ .
- Si  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$ , alors  $(g \circ f)(E) = g[f(E)]$ .

## Propriété 5.24

Soient  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ ,  $g$  une application de  $F$  vers  $G$  et  $h$  une application de  $G$  vers  $H$ .

- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- $f \circ \text{Id}_E = f$
- $\text{Id}_F \circ f = f$

## Propriété 5.25

La composée de deux injections (resp surjections, bijections) est une injection (resp surjection, bijection).

## Démonstration

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles.

Soient  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  et  $g$  une application de  $F$  vers  $G$ .

- On suppose que  $f$  et  $g$  sont injectives.  
$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$
$$\Leftrightarrow g[f(x)] = g[f(x')]$$
$$\Rightarrow f(x) = f(x') \quad \text{car } g \text{ injective.}$$
$$\Rightarrow x = x' \quad \text{car } f \text{ injective.}$$
  
C'est-à-dire  $g \circ f$  injective.
- On suppose que  $f$  et  $g$  sont surjectives.  
$$\text{Im } f = f(E) = F$$
$$\text{Im } g = g(F) = G$$
  
On a donc  $(g \circ f)(E) = g[f(E)] = G$ .  
C'est-à-dire  $g \circ f$  surjective
- D'après les deux propriétés précédentes.

## Propriété 5.26

Soient  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  et  $g$  une application de  $F$  vers  $G$ .

- $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  injective
- $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  surjective

## Démonstration

- On démontre la contraposée :  
On suppose  $f$  non injective c'est-à-dire  $\exists x, x' \in E, x \neq x'$  et  $f(x) = f(x')$ .  
D'où  $g[f(x)] = g[f(x')]$  avec  $x \neq x'$  c'est-à-dire  $g \circ f$  non injective.
- $g \circ f$  surjective  $\Leftrightarrow \forall z \in G, \exists x \in E / z = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$   
 $\Leftrightarrow \forall z \in G, \exists f(x) \in f(E) / z = g[f(x)]$   
On pose  $f(x) = y$   
 $\Rightarrow \forall z \in G, \exists y \in F / z = g(y) \Leftrightarrow g$  surjective

## Définition 5.27

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

Si'il existe une application  $\tilde{f}$  de  $F$  vers  $E$  telle que  $\tilde{f} \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ \tilde{f} = \text{Id}_F$ , on dit que  $f$  admet une application réciproque.

## Propriété 5.28

Si une application admet une application réciproque, celle-ci est unique.

## Démonstration

On suppose qu'il existe deux applications réciproques  $f_1$  et  $f_2$  à une fonction  $f$  de  $E$  vers  $F$ .

On considère  $f_1 \circ f \circ f_2$

$$f_1 \circ f \circ f_2 = (f_1 \circ f) \circ f_2 = \text{Id}_E \circ f_2 = f_2$$

$$f_1 \circ f \circ f_2 = f_1 \circ (f \circ f_2) = f_1 \circ \text{Id}_F = f_1$$

## Remarque 5.29

On note alors  $f^{-1}$  l'unique application  $\tilde{f}$  qui vérifie  $\tilde{f} \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ \tilde{f} = \text{Id}_F$ .

## Propriété 5.30

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

$f$  bijective  $\Leftrightarrow f$  admet une application réciproque.

## Démonstration

- ( $\Leftarrow$ )  $\tilde{f} \circ f = \text{Id}_E$  or  $\text{Id}_E$  injective donc  $f$  injective.  
 $f \circ \tilde{f} = \text{Id}_F$  or  $\text{Id}_F$  surjective donc  $f$  surjective.
- ( $\Rightarrow$ )  $f$  bijective  $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x)$ .  
On pose  $\tilde{f} : F \rightarrow E$   
 $y \mapsto x$  tel que  $y = f(x)$   
 $\tilde{f}$  est bien une application qui vérifie les égalités  $\tilde{f} \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ \tilde{f} = \text{Id}_F$ .

### Propriété 5.31

Soient  $f$  une bijection de  $E$  vers  $F$  et  $g$  une bijection de  $F$  vers  $G$ .

On a :  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

### Démonstration

La fonction réciproque de  $g \circ f$  est notée  $(g \circ f)^{-1}$  elle est unique et doit vérifier deux égalités.

Vérifions que  $f^{-1} \circ g^{-1}$  correspond bien à la définition :

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \\ = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ = f^{-1} \circ \text{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

### Définition 5.32

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $E$ .

On dit que  $f$  est une involution si et seulement si  $f \circ f = \text{Id}_E$  (i.e.  $f^{-1} = f$ )

### Exemple 5.33

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto 1/x$$

Attention :  $f(x) = x^{-1}$  et  $f^{-1}(x) = x^{-1}$ .

### Remarque 5.34

On a, en particulier, qu'une involution est une bijection.

### Définition 5.35

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  et soit  $A$  une partie de  $E$ .

On appelle restriction de  $f$  à  $A$  et on note  $f|_A$  l'application définie par  $f|_A : A \rightarrow F$   
 $x \mapsto f(x)$

C'est-à-dire,  $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$ .

### Définition 5.36

Soit  $f$  une application de  $A \subset E$  vers  $F$ .

On appelle prolongement de  $f$  à  $E$ , toute application  $g$  de  $E$  vers  $F$  telle que,  $\forall x \in A, g(x) = f(x)$ .

Autrement dit,  $g|_A = f$ .

### Remarque 5.37

Pour toute fonction, une restriction est unique alors qu'un prolongement ne l'est généralement pas.

### Définition 5.38

Si  $n$  est un entier naturel, on pose  $\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .

Si, de plus,  $n$  est non nul, on pose  $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Définition 5.39

On dit qu'un ensemble  $A$  est fini si et seulement si il existe un entier naturel non nul  $p$  et une bijection de  $\mathbb{N}_p^*$  dans  $A$ .

L'entier unique  $p$  est le nombre d'éléments de  $A$  et est noté  $\text{Card}(A)$  pour cardinal de  $A$ .

Par convention, on pose  $\text{Card}(\emptyset) = 0$ .

### Propriété 5.40

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis tels que  $\text{Card}(E) = n$  et  $\text{Card}(F) = p$ . On a :

- $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) = n \times p$ .
- $\text{Card}(\mathcal{A}(E, F)) = p^n$ .
- $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ .

### Propriété 5.41

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis.

On a :  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

### Propriété 5.42

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de même cardinal.

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

On a :  $f$  injective  $\Leftrightarrow f$  surjective  $\Leftrightarrow f$  bijective.

### Démonstration

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\Leftrightarrow \text{Card}(E) = \text{Card}(f(E)) \\ &\Leftrightarrow \text{Card}(F) = \text{Card}(f(E)) \\ &\Leftrightarrow f(E) = F \text{ car } f(E) \subset F \quad \Leftrightarrow f \text{ surjective.} \end{aligned}$$

### Définition 5.43

Un ensemble  $E$  est dit dénombrable s'il existe une bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ .

### Exemple 5.44

L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.

En effet, il suffit de considérer l'application  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par  $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ .

On montre aussi que  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

### Définition 5.45

Deux ensembles sont dits équipotents s'il existe une bijection de l'un vers l'autre.

### Exemple 5.46

Les ensembles  $]0;1[$  et  $[1;+\infty[$  sont équipotents. En effet, il suffit de considérer l'application  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

## Remarque 5.47

Pour les ensembles finis, "être équipotents" est équivalent à "avoir même cardinal".

## Remarque 5.48

Nous allons voir maintenant la notion de famille qui est très importante en mathématiques. L'idée est d'utiliser la notation des suites pour considérer un ensemble qui peut être infini et indicé de façon spécifique.

## Définition 5.49

Soient  $I$  et  $E$  deux ensembles.

Soit une application  $f: I \rightarrow E$

$$i \mapsto f(i) = x_i$$

On appelle famille des  $x_i$  indicé par  $I$  et on note  $(x_i)_{i \in I}$  l'application  $f$ .

## Exemple 5.50

Soit  $a \in [1, 2]$ . Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des droites du plan.

On considère l'application  $[1, 2] \rightarrow \mathcal{D}$

$$a \mapsto D_a \quad \text{où } D_a \text{ est la droite d'équation } y = ax + 1$$

On peut ici parler de la famille des  $(D_a)_{a \in [1, 2]}$ .

## Remarques 5.51

- Si  $I = \mathbb{N}$ , au lieu de familles, on parle de suites.
- Si  $I$  est finie, on parle de famille finie.  
On considère généralement des familles de la forme  $(x_i)_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} = (x_i)_{i=1, p} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ .
- Si  $J \subset I$ ,  $(x_i)_{i \in J}$  est une sous-famille de  $(x_i)_{i \in I}$  et  $(x_i)_{i \in I}$  est une sur-famille de  $(x_i)_{i \in J}$ .

## Définition 5.52

On peut donc étendre la notion de réunion et d'intersection d'ensembles.

Soit  $I$  un ensemble et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties d'un ensemble  $E$ .

On a :  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x / \exists i \in I, x \in A_i\}$  et  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x / \forall i \in I, x \in A_i\}$ .

## Remarque 5.53

En pratique,  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i$  et  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$ .

## Exemple 5.54

Dans le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , soit  $\Gamma$  l'ensemble des points du cercle unité.

Pour tout point  $M$ , on note  $C_M$  le cercle de centre  $M$  et de rayon 1 i.e.  $C_M = \{P \in \mathcal{P} / PM = 1\}$ .

On considère la famille  $(C_M)_{M \in \Gamma}$ .

On a  $\bigcup_{M \in \Gamma} C_M = \{P \in \mathcal{P} / OP \leq 2\}$  = disque de centre  $O$  et de rayon 2

$$\text{et } \bigcap_{m \in \Gamma} C_M = \{O\}.$$

## Définition 5.55

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties d'un ensemble  $E$ .

On dit que  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$  si et seulement si :

- i)  $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
- ii)  $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- iii)  $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ .

## Exemple 5.56

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $A_n = ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ . Les  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  forment une partition de  $]0, 1[$ .

## 6. Relations

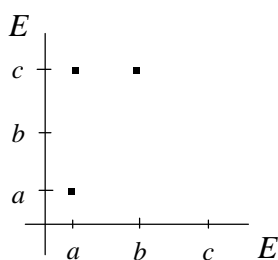
### Définition 6.1

Soit  $E$  un ensemble. On appelle relation binaire toute correspondance de  $E$  vers  $E$ .

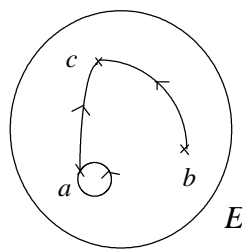
### Exemple 6.2

Soient  $E = \{a, b, c\}$  et  $\Gamma = \{(a, a); (a, c); (b, c)\}$ .

$\mathcal{R} = (\Gamma, E, E)$  est une relation binaire sur  $E$  que l'on peut représenter par :



ou



### Remarque 6.3

Soit  $\mathcal{R} = (\Gamma, E, E)$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ .

On notera  $x \mathcal{R} y$  pour exprimer le fait que  $(x, y) \in \Gamma$ .

### Exemple 6.4

Soit  $E$  un ensemble et soit  $\Gamma$  la diagonale de  $E \times E$ . On a :  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow x = y$ .

### Définition 6.5

Soit  $E$  un ensemble. On dit qu'une relation  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est :

- a. *Réflexive* si et seulement si  $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$ .
- b. *Symétrique* si et seulement si  $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ .
- c. *Antisymétrique* si et seulement si  $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$ .
- d. *Transitive* si et seulement si  $\forall x, y, z \in E, x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$ .

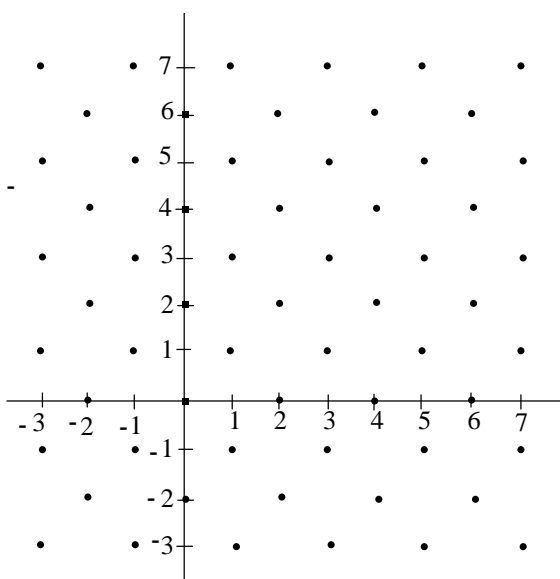
## Définition 6.6

Une relation binaire est dite une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

## Exemples 6.7

- L'équipotence est une relation d'équivalence.
- Soit  $E = \mathbb{R}$ .  
On pose  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow E(x) = E(y)$  où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .  
On vérifie aisément que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- Soit  $c$  un réel. On définit une relation binaire sur  $\mathbb{R}$  appelée relation de congruence modulo  $c$  par  $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \equiv b [c] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a - b = kc$ .  
La congruence est une relation d'équivalence.
- Soit  $E = \mathbb{Z}$ .  
Soit  $\mathcal{R} = (\Gamma, E, E)$  où  $\Gamma = (2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}) \cup ((\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}))$  avec  $2\mathbb{Z} = \{2p \text{ où } p \in \mathbb{Z}\}$ .

Ce que l'on peut représenter :



On a :  $n \mathcal{R} p \Leftrightarrow n$  et  $p$  ont la même "parité".

On vérifie aisément que c'est bien une relation d'équivalence.

## Définition 6.8

Soient  $E$  un ensemble,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ .

On appelle classe d'équivalence de  $x$  suivant  $\mathcal{R}$  l'ensemble :  $\bar{x} = cl(x) = \{y \in E / x \mathcal{R} y\}$ .

On dit que  $x$  est un représentant (en général, ce n'est pas le seul) de  $cl(x)$ .

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence est appelé ensemble quotient et est noté  $E / \mathcal{R}$ .

## Exemple 6.9

- La relation "être parallèle à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites du plan. Chaque classe d'équivalence est appelée une direction.
- On considère  $\mathbb{Z}$  muni de la relation d'équivalence de l'exemple précédent :  $\mathcal{R} = (\Gamma, E, E)$  où  $\Gamma = (2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}) \cup ((\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}))$  avec  $2\mathbb{Z} = \{2p \text{ où } p \in \mathbb{Z}\}$ . On a :  $\bar{0} = 2\mathbb{Z}$  et  $\bar{1} = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ .  
On note  $\mathbb{Z} / \mathcal{R}$  l'ensemble  $E / \mathcal{R}$  c'est-à-dire  $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ .

## Propriété 6.10

Soient  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

Les différentes classes d'équivalence de  $E_{|\mathcal{R}}$  forment une partition de  $E$ .

### Démonstration

- $\forall a \in E, a \in cl(a)$  donc  $cl(a) \neq \emptyset$
- Soient  $a, b \in E$  et supposons que  $cl(a) \cap cl(b) \neq \emptyset$ .  
Soit  $x \in cl(a) \cap cl(b)$ .  
On a :  $x \in cl(a)$  donc  $x \mathcal{R} a$  et  $a \mathcal{R} x$ .  
 $x \in cl(b)$  donc  $x \mathcal{R} b$ .  
De part la transitivité, on obtient  $a \mathcal{R} b$  et donc  $cl(a) = cl(b)$ .  
Les classes sont donc bien disjointes.

- $\{a\} \subset cl(a) \subset E$ .  
Alors  $\bigcup_{a \in E} \{a\} \subset \bigcup_{a \in E} cl(a) \subset E$ .  
On a donc  $E \subset \bigcup_{a \in E} cl(a) \subset E$ .  
D'où  $\bigcup_{a \in E} cl(a) = E$ .

## Propriété 6.11

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une partition d'un ensemble  $E$ .

Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie par  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists j \in I / x \in A_j$  et  $y \in A_j$ .

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et  $E_{|\mathcal{R}} = \{A_i ; i \in I\}$ .

### Démonstration

1. Montrons que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
  - #  $x \mathcal{R} x$  car  $\exists i \in I / x \in A_i$ .
  - #  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists j \in I / x \in A_j$  et  $y \in A_j \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$ .
  - #  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists j \in I / x \in A_j$  et  $y \in A_j$   
 $y \mathcal{R} z \Leftrightarrow \exists k \in I / y \in A_k$  et  $z \in A_k$   
Or les  $(A_i)_{i \in I}$  forment une partition donc si  $y \in A_j$  et  $y \in A_k$  on a  $j = k$ .  
D'où  $x$  et  $z$  appartiennent au même  $A_j$  donc on a bien  $x \mathcal{R} z$ .
2. De part la définition de  $\mathcal{R}, \forall i \in I, \forall x \in A_i, cl(x) = A_i$ .

## Remarque 6.12

Soient  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

L'application  $j : E \rightarrow E_{|\mathcal{R}}$  est une surjection appelée surjection canonique.

$$x \mapsto cl(x)$$

## Définition 6.13

Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est dite une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Un ensemble muni d'une relation d'ordre est appelé un ensemble ordonné.  
 L'ordre est dit total si  $\forall x, y \in E$ , on a soit  $x \mathcal{R} y$  soit  $y \mathcal{R} x$ . Il est dit partiel dans le cas contraire.  
 Deux éléments  $x$  et  $y$  sont dit comparables si et seulement si on a  $x \mathcal{R} y$  ou  $y \mathcal{R} x$ .

### Remarque 6.14

L'ordre est total si et seulement si tous les éléments sont comparables entre eux.

### Exemples 6.15

- Soit  $E$  un ensemble, l'inclusion est une relation d'ordre partiel sur  $\mathcal{P}(E)$ .
- La relation  $\leq$  est une relation d'ordre total sur  $\mathbb{R}$ .

### Remarque 6.16

L'égalité est aussi une relation d'ordre.

### Définition 6.17

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur un ensemble  $E$ . On appelle relation d'ordre strict associée à  $\mathcal{R}$  et on note  $\mathcal{R}_\neq$  la relation définie par  $x \mathcal{R}_\neq y \Leftrightarrow (x \mathcal{R} y \text{ et } x \neq y)$ .

### Exemple 6.18

Sur  $\mathbb{R}$ , la relation  $<$  est la relation d'ordre strict associée à  $\leq$ .

### Remarque 6.19

Une relation d'ordre strict n'est pas une relation d'ordre (elle n'est pas réflexive).

### Définition 6.20

Soient  $(E, \mathcal{R})$  et  $(F, \mathcal{S})$  deux ensembles ordonnés.

Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

On dit que  $f$  est une application croissante si et seulement si  $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) \mathcal{S} f(y)$

On dit que  $f$  est une application décroissante si et seulement si  $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow f(y) \mathcal{S} f(x)$

On dit que  $f$  est une application strictement croissante si et seulement si  $\forall x, y \in E, x \mathcal{R}_\neq y \Rightarrow f(x) \mathcal{S}_\neq f(y)$

On dit que  $f$  est une application strictement décroissante si et seulement si  $\forall x, y \in E, x \mathcal{R}_\neq y \Rightarrow f(y) \mathcal{S}_\neq f(x)$

### Définition 6.21

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur un ensemble  $E$ .

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On dit que  $A$  est minorée si et seulement si  $\exists m \in E / \forall x \in A, m \mathcal{R} x$ .

On dit que  $A$  est majorée si et seulement si  $\exists M \in E / \forall x \in A, x \mathcal{R} M$ .

On dit qu'un élément  $m$  de  $A$  est le plus petit élément de  $A$  (ou le minimum de  $A$ ) et on note  $m = \min(A)$  si et seulement si  $\forall x \in A, m \mathcal{R} x$ .

On dit qu'un élément  $M$  de  $A$  est le plus grand élément de  $A$  (ou le maximum de  $A$ ) et on note  $M = \max(A)$  si et seulement si  $\forall x \in A, x \mathcal{R} M$ .

## Remarques 6.22

- $\{m \in E / \forall x \in A, m \mathcal{R} x\}$  est appelé l'ensemble des minorants.  
 $\{M \in E / \forall x \in A, x \mathcal{R} M\}$  est appelé l'ensemble des majorants.
- Par antisymétrie, le maximum et le minimum sont uniques.
- Un ensemble qui admet un minimum est minoré.  
Un ensemble qui admet un maximum est majoré.

## Définition 6.23

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre sur un ensemble  $E$ .

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On dit que  $A$  admet une borne inférieure si et seulement si l'ensemble des minorants de  $A$  admet un maximum et, dans ce cas,  $\inf A = \max(\{m \in E / \forall x \in A, m \mathcal{R} x\})$ .

On dit que  $A$  admet une borne supérieure si et seulement si l'ensemble des majorants de  $A$  admet un minimum et, dans ce cas,  $\sup A = \min(\{M \in E / \forall x \in A, x \mathcal{R} M\})$ .

## Exemples 6.24

- Soient  $E = [0, 2]$  et  $A = [0, 1[$  munis de la relation  $\leq$  usuelle sur  $\mathbb{R}$ .  
On a  $0 = \min(E)$ ;  $2 = \max(E)$ ;  $0 = \min(A)$ ;  
 $A$  est majoré par 1,5 ou 1,6 mais n'admet pas de max;  $1 = \sup(A)$ .
- Soit  $E = \{1/n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\}$  muni de la relation  $\leq$  usuelle sur  $\mathbb{R}$ .  
On a  $0 = \inf(E)$ .