Espaces euclidiens

1. Généralités

Définition 1.1

Soit E un e.v. sur $\mathbb{R}$.
On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire sur E symétrique, définie et positive.
On note généralement un produit scalaire $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$ pour x et $y \in E$.

Remarque 1.2

Les propriétés caractérisant un produit scalaire sur un e.v. réel E sont donc :

- $\langle \alpha x+\beta x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x', y\rangle$ $\quad \forall x,x',y \in E,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ $\quad \forall x,y \in E$
- $\langle x, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
- $\langle x, x\rangle \geq 0$ $\quad \forall x \in E$

Exemples 1.3

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  $(x,y) \mapsto xy$ c'est-à-dire $f(x,y) = \langle x, y\rangle = xy$.
- $\varphi : \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$
  $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $\varphi(P,Q) = \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition 1.4

L'application f définie par $f : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ $\quad x_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1,n$
et $y = (y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n)$ $\quad y_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1,n$
est appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.5

La forme quadratique associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ où $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$.

Définition 1.6

On appelle espace préhilbertien réel tout espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarque 1.7

Hilbertien = evn complet dont la norme est issue d'un produit scalaire.
Préhilbertien de dim finie = Hilbertien.

Exemples 1.8

- Soit $E = \mathbb{R}[X]$
  $< > :\quad \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$
  $\qquad (P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ $(E,< >)$ est un espace préhilbertien réel.
- Soit $F = \mathbb{R}_n[X] = \{P\in\mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leq n\}$ et soit $< >$ le produit scalaire précédent.
  $(F,< >)$ est un espace euclidien.
- Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $G = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application définie par $f : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}\,({}^tA.B)$.
  $(G,< >) = (G,f)$ est un espace euclidien.

Remarque 1.9

La donnée d'une forme quadratique de signature $(n,0)$ sur un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n fournit une structure d'espace euclidien.

Propriété 1.10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E,< >)$ un espace préhilbertien réel.
$\forall x,y\in E,\ |\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$.
L'égalité est obtenue si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Démonstration

Si $y = 0$, l'égalité de la propriété est vérifiée $\forall x\in E$. On peut donc supposer $y \neq 0$.

Inégalité $\quad \forall x,y\in E$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ et on suppose x et y fixés.
$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0$ car le produit scalaire est positif.
$\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0$.
$\lambda^2\langle y, y\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle \geq 0$.
Puisque $y \neq 0$, $\lambda^2\langle y, y\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle$ est un polynôme de degré 2 en λ.
Ce polynôme est de signe constant donc le discriminant doit être négatif ou nul, ce qui donne :

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\langle x, y\rangle^2 \leq 4\langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad |\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Egalité :

- Supposons $x = \lambda y$
  $|\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda|\langle y, y\rangle$
  $\langle \lambda y, \lambda y\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \times \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \times \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\langle y, y\rangle$.
- Si on a l'égalité $|\langle x, y\rangle| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$.
  On obtient $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle = 0$.
  Le discriminant est nul et l'on a donc une racine double pour le polynôme $\lambda^2\langle y, y\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle$.
  Or, si celui-ci s'annule pour un λ_0, on a nécessairement $\langle x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y\rangle = 0$.
  C'est-à-dire $x + \lambda_0 y = 0$ où encore $x = -\lambda_0 y$.

Remarques 1.11

- On utilise aussi l'expression (au carré) : $\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.
- Si $E=\mathbb{R}^n$, et si $<\,>$ est le produit scalaire canonique, on obtient $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$.
- Si $E=\mathscr{C}([0,1])$ et si on prend comme produit scalaire : $<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \left(\int_0^1 (f(t))^2\,dt\right)\left(\int_0^1 (g(t))^2\,dt\right).$$

Propriété 1.12

Soit $(E,<\,>)$ un espace préhilbertien réel.
L'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto <x,x>^{1/2}$ est une norme.

c'est-à-dire
- (i) $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ $\forall x\in E$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$.
- (iii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\forall x,y\in E$.

De plus, on obtient l'égalité dans (iii) lorsque x et y sont positivement liés.

Démonstration

(i) $\|x\|=0 \Rightarrow \langle x,x\rangle=0 \Rightarrow x=0$ car le produit scalaire est défini.

(ii) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x,\lambda x\rangle^{\frac12} = (\lambda^2)^{\frac12}\times\langle x,x\rangle^{\frac12} = |\lambda|\,\|x\|$

(iii) Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle = \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2\\ &= \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle x,y\rangle+\|y\|^2 \qquad = \|x\|^2+2\,\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\ &\le \|x\|^2+2\,|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2\end{aligned}$$

si $y=\lambda x$ avec λ positif c'est une égalité et non sinon.

$$\le \|x\|^2+2\|x\|\times\|y\|+\|y\|^2$$

d'après Cauchy-Schwarz.

$$\le (\|x\|+\|y\|)^2$$

(iii) Egalité
- Supposons $y=\lambda x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}_+$.
  $\|x+y\| = \|x+\lambda x\| = \|(1+\lambda)x\| = |1+\lambda|\,\|x\| = (1+\lambda)\|x\|$
  $\|x\|+\|y\| = \|x\|+\|\lambda x\| = \|x\|+|\lambda|\,\|x\| = \|x\|+\lambda\|x\| = (1+\lambda)\|x\|$
- On a l'égalité de Cauchy-Schwarz lorsque x et y linéairement dépendants.
  On vérifie aisément que $y=\lambda x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}_-$ ne convient pas.

Remarques 1.13

- La norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ si $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$.
- Pour retenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on peut se rappeler de $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Rappel 1.14 (Inégalité de Minkowski)

- Si $E=\mathbb{R}^n$, et si $<\,>$ est le produit scalaire canonique, on a $\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}$.
- Si $E=\mathscr{C}([0,1])$ et si on prend comme produit scalaire : $<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$\left(\int_0^1 [f(t)+g(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 [f(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 [g(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Définition 1.15

Soit $(E,< >)$ un espace préhilbertien réel. Soient x,y deux vecteurs non nuls de E. On appelle mesure de l'angle non orienté du couple (x,y) le réel θ compris entre 0 et π tel que $\cos\theta = \dfrac{< x,y >}{< x,x >^{1/2} \ < y,y >^{1/2}}$.

Remarques 1.16

- Toutes les normes ne sont pas forcement issues d'un produit scalaire.
- On obtient un espace métrique en posant $d(x,y) = \| y - x \|$.
- Interprétation dans le cas euclidien : soit (e) une base d'un espace euclidien $(E,< >) = (E,f)$. Si $A = \mathscr{M}_e(f) = \mathscr{M}_e(< >)$ et si x a pour coordonnées X dans (e), alors $\|x\| = ({}^tXAX)^{1/2}$.

Propriété 1.17

Dans un espace euclidien, toute famille de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux est libre.

Démonstration

Soit $(E,< >)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Soit $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ une famille de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux $p \in \mathbb{N}^*$ (on aura $p \leq n$).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i = 0 \quad &\Rightarrow \quad \forall j = 1,p \quad < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i, a_j > \ = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall j = 1,p \quad \lambda_j < a_j, a_j > \ = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall j = 1,p \quad \lambda_j = 0 \qquad \text{car} < > \text{est défini donc il n'y a pas de vecteurs isotropes.}
\end{aligned}$$

Donc c'est bien une famille libre.

Propriété 1.18 (Théorème de Pythagore)

Soit $(E,< >)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Soit $(v_i)_{i=1,p}$ une famille de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux. Alors $\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

Démonstration

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = < \sum_{i=1}^{p} v_i, \sum_{i=1}^{p} v_i > \ = \ < \sum_{i=1}^{p} v_i, \sum_{j=1}^{p} v_j > = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} < v_i, v_j > = \sum_{i=1}^{p} < v_i, v_i > = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2.$$

Remarque 1.19

Avec une notation f au lieu de $< >$, on obtient
$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n, x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1, x_1) + f(x_2, x_2) + \cdots + f(x_n, x_n)$ ou
$q_f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = q_f(x_1) + q_f(x_2) + \cdots + q_f(x_n)$.

Propriété 1.20 (Identité du parallélogramme)

Soit $(E,< >)$ un espace euclidien. On a : $\forall x,y \in E, \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Démonstration

Voir exercice formes quadratiques 011 : $q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y)$.

2. Orthogonaux

Corollaire 2.1

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien.
$\forall \varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R}) = E^* =$ dual de E (c'est-à-dire pour toute forme linéaire sur E).

$\exists ! y_0 \in E \ / \ \varphi(x) = <x,y_0> \ \ \forall x \in E.$

On a E^* isomorphe à E.

Corollaire 2.2

Tout espace euclidien $(E,< >)$ admet une base orthonormale et dans cette nouvelle base, le produit scalaire est le produit scalaire canonique.

Propriété 2.3

Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base orthogonale d'un espace euclidien $(E,<>)$ de dimension $p \geq 1$.
Alors, $\forall v \in E$, $v = \sum_{i=1}^{p} \frac{<v, e_i>}{<e_i, e_i>} e_i$.

Démonstration

On a $v = \sum_{i=1}^{p} v_i e_i$ et, pour tout $j = 1,p$, $<v,e_j> = <\sum_{i=1}^{p} v_i e_i, e_j> = \sum_{i=1}^{p} v_i <e_i, e_j> = v_j <e_j, e_j>$.
D'où $v_j = \frac{<v, e_j>}{<e_j, e_j>}$.

Remarque 2.4

Les coordonnées de v dans $(e_1, e_2, ..., e_p)$ sont donc $\left(\frac{<v, e_1>}{<e_1, e_1>}, \frac{<v, e_2>}{<e_2, e_2>}, ..., \frac{<v, e_p>}{<e_p, e_p>}\right)$.
Si la base est orthonormale, on a $\langle e_j, e_j \rangle = 1$ pour tout $j = 1,p$.

Propriété 2.5

Soit $(E,< >)$ un espace euclidien et soit F un s.e.v. de E.
On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
$F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Démonstration

On a une structure d'espace euclidien en considérant la restriction de $< >$ à F.

- Soit $(e_i)_{i=1,p}$ une base orthonormale de F et soit $x \in E$.
  Pour tout $i = 1,p$ on pose $\lambda_i = <x,e_i>$ et $a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.
  On a bien $a \in F$ et on pose $b = x - a$.
  On a, $\forall i = 1,p$, $<b,e_i> = <x,e_i> - <a,e_i> = \lambda_i - \lambda_i = 0$.
  Donc $b \in F^{\perp}$ et $x = a + b$.
  De plus, montrons que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$: on sait déjà que $\{0\} \subset F \cap F^{\perp}$.
  Soit maintenant $x \in F \cap F^{\perp}$, on a $\|x\|^2 = <x, x> = 0$ et donc $x = 0$.
- Puisque $E = F \oplus F^{\perp} = E = F^{\perp} \oplus (F^{\perp})^{\perp}$, on a $\dim F = \dim (F^{\perp})^{\perp}$.
  Or $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ donc $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Définition 2.6

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien et soit F un s.e.v de E. On a $E = F \oplus F^{\perp}$.
L'application p_F qui, à tout $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in F^{\perp}$, associe $p_F(x) = a$ est appelée projection sur F de direction $F^{\perp}$ ou projection orthogonale sur F. Avec les même hypothèses, l'application s_F, qui à x associe $s_F(x) = a - b$ est appelée la symétrie orthogonale par rapport à F.

Remarque 2.7

$s_F = 2\, p_F - \mathrm{Id}_E$ car $2a - (a + b) = a - b$.

Corollaire 2.8

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien, soit F un s.e.v de E et soit $(u_1, u_2,...,u_p)$ est une base orthonormale de F.
Alors $\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, u_i > u_i$.

Démonstration

Voir la démonstration de la propriété 2.5.

Définition 2.9

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien et soit F un s.e.v de E.
On définie les applications distances suivantes : $\forall x,y \in E,\ d(x,y) = \|x - y\|$.
$\forall x \in E,\ d(x,F) = \mathrm{Inf}_{y\in F}(d(x,y))$.

Propriété 2.10

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien et soit F un s.e.v de E.

1. $\forall x \in E,\ d^2(x,p_F(x)) = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.
2. $\forall x \in E,\ d(x,F) = d(x,p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$.

Démonstration

1. $\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$ d'après Pythagore.
   C'est-à-dire $\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.
2. $\forall y \in F$, $d^2(x,y) = \|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2$
   $= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$ car $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et $p_F(x) - y \in F$
   $\geq \|x - p_F(x)\|^2$.
   Donc $\|x - p_F(x)\|^2$ est un minorant de $\{d(x,y),\ y \in F\}$. Or $\forall y \in F,\ d(x,y) \geq d(x,F)$.
   En particulier, $p_F(x) \in F$. D'où $d(x,p_F(x)) \geq d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.

3. Méthode d'orthonormalisation de Schmidt

Exemple d'orthonormalisation 3.1

Dans $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, on veut orthonormaliser l'espace E engendré par les vecteurs (libres) : $u_1 = (1,1,1,0)$ $u_2 = (1,1,0,0)$ $u_3 = (1,0,0,0)$.

1ère étape Orthogonalisation $\rightarrow (v_1,v_2,v_3)$

- $v_1 = u_1$.
- $v_2 = u_2 + \lambda v_1$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
  On a $v_2 \neq 0$ pour tout λ car u_1 et u_2 sont linéairement indépendants.
  On veut $<v_2,v_1> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_2 + \lambda u_1,u_1> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_2,u_1> + \lambda<u_1,u_1> = 0$.
  On a $<u_1,u_1> \neq 0$ car $u_1 \neq 0$.
  $\Leftrightarrow$ $\lambda = -\dfrac{<u_2,u_1>}{<u_1,u_1>}$
  $\Leftrightarrow$ $\lambda = -\dfrac{2}{3}$.
  $v_2 = (1,1,0,0) - \frac{2}{3}(1,1,1,0)$.
  D'où $v_2 = \frac{1}{3}(1,1,-2,0)$.
- $v_3 = u_3 + \lambda v_1 + \mu v_2$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
  On a $v_3\neq 0$ pour tous les λ et μ car u_1, u_2 et u_3 sont linéairement indépendants.
  On veut $<v_3,v_1> = 0$ et $<v_3,v_2> = 0$.
  $<v_3,v_1> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_3 + \lambda v_1 + \mu v_2,u_1> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_3,u_1> + \lambda<u_1,u_1> + \mu<v_2,v_1> = 0$
  On a $<v_2,v_1> =0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_3,u_1> + \lambda<u_1,u_1> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $\lambda = -\dfrac{<u_3,u_1>}{<u_1,u_1>}$
  $\Leftrightarrow$ $\lambda = -\dfrac{1}{3}$.
  $<v_3,v_2> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_3 + \lambda v_1 + \mu v_2,v_2> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_3,v_2> + \lambda<v_1,v_2> + \mu<v_2,v_2> = 0$
  On a $<v_1,v_2> =0$
  $\Leftrightarrow$ $<u_3,v_2> + \mu<v_2,v_2> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $\mu = -\dfrac{<u_3,v_2>}{<v_2,v_2>}$
  $\Leftrightarrow$ $\mu = -\dfrac{\frac{1}{3}(1)}{(\frac{1}{3})^2(1+1+4)} = -\dfrac{1}{2}$.
  $v_3 = (1,0,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1,0) - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(1,1,-2,0)$.
  D'où $v_3 = \frac{1}{6}(6 - 2 - 1,\ 0 - 2 - 1,\ 0 - 2 + 2,\ 0 + 0 + 0)$
  $= \frac{1}{2}(1,-1,0,0)$.

2ème étape Normalisation $\rightarrow (b_1,b_2,b_3)$

- $b_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{v_1}{<v_1,v_1>^{1/2}}$ $v_1 = (1,1,1,0)$ $\|v_1\| = \sqrt{3}$
- $b_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{v_2}{<v_2,v_2>^{1/2}}$ $v_2 = \frac{1}{3}(1,1,-2,0)$ $\|v_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{6}$
- $b_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \dfrac{v_3}{<v_3,v_3>^{1/2}}$ $v_3 = \frac{1}{2}(1,-1,0,0)$ $\|v_3\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Propriété 3.2

Toute famille $(a_i)_{i=1,p}$ libre de vecteurs (non nuls) d'un espace euclidien de dimension n ($n\geq p \geq 1$) peut être remplacée par une famille $(b_j)_{j=1,p}$ de vecteurs deux à deux orthogonaux (famille orthogonale) de telle sorte que : Vect $(a_1,a_2,a_3,...,a_k)$ = Vect $(b_1,b_2,b_3,...,b_k)$ pour tout $k = 1,p$.

Méthode de Schmidt 3.3

- $b_1 = a_1$.
- $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
  On a b_1 et b_2 linéairement indépendants pour tout λ.
  On veut $<b_2,b_1> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $<a_2,a_1> + \lambda<a_1,a_1> = 0$ on a $<a_1,a_1> \neq 0$ car $a_1 \neq 0$
  $\Leftrightarrow$ $\lambda = -\dfrac{<a_1, a_2>}{<a_1, a_1>}$
  D'où $b_2 = a_2 - \dfrac{<a_1, a_2>}{<a_1, a_1>}\, b_1$.
  On vérifie aisément que Vect (b_1,b_2) = {CL de b_1 et b_2} = {CL de a_1 et a_2} = Vect (a_1,a_2).
  On a bien $<b_2,b_1> = 0$.
- Supposons que l'on ait construit $b_1,b_2,b_3,...,b_{k-1}$.
  Il faut trouver $(\lambda_i)_{i=1,k-1}$ tels que $b_k = a_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i b_i$ soit orthogonal à chaque b_j avec $j = 1,n$.
  $<b_k,b_j> = 0$ $\Leftrightarrow$ $<a_k,b_j> + \lambda_j<b_j,b_j> = 0$
  $\Leftrightarrow$ $\lambda_j = -\dfrac{<a_k, b_j>}{<b_j, b_j>}$.
  On construit ainsi b_k.
  Vect $(b_1,b_2,b_3,...,b_k)$ = {CL de $b_1,b_2,b_3,...,b_k$} = {CL de $a_1,a_2,a_3,...,a_k$} = Vect $(a_1,a_2,a_3,...,a_k)$.

Théorème 3.4 (de la base orthonormale incomplète)

Toute famille orthonormale de p vecteurs dans un espace euclidien E de dimension n ($n > p$) peut être complétée en une base orthonormale de E.

Démonstration

Théorème de la base incomplète + procédé de Schmidt.

4. Endomorphisme adjoint

Propriété 4.1

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien.
Soit $\varphi\in \mathscr{L}(E)$ c'est-à-dire φ est application linéaire de E dans E (ou φ est un endomorphisme de E).
Alors $\exists!\varphi^*\in \mathscr{L}(E)$ / $<\varphi(x),y> = <x,\varphi^*(y)>$ $\forall x,y\in E$.
Cet endomorphisme φ^* est appelé l'endomorphisme adjoint de φ.

Démonstration

Unicité : On suppose qu'il existe deux applications ψ_1 et $\psi_2 \in \mathscr{L}(E)$ telles que :
$<\varphi(x),y> = <x,\psi_1(y)> = <x,\psi_2(y)>$ $\forall x,y\in E$.
On a donc $<x,\psi_1(y) - \psi_2(y)> = 0$ $\forall x,y\in E$.
Or un produit scalaire est non dégénéré donc on obtient $\psi_1(y) - \psi_2(y) = 0$ $\forall y\in E$.
Donc $\psi_1(y) = \psi_2(y)$ $\forall y\in E$ c'est-à-dire $\psi_1 = \psi_2$.

Existence : $\forall y\in E$, l'application $x \mapsto <\varphi(x),y>$ est une forme linéaire en x.
Donc $\forall y\in E$, $\exists! y_0\in E$ / $<\varphi(x),y> = <x,y_0>$.
Soit φ^* l'application de E dans E qui, à tout y, associe y_0.

$\exists! y_0 \in E \,/ <\varphi(x),y> = <x,y_0> \quad \forall x \in E.$
$\exists! y'_0 \in E \,/ <\varphi(x),y'> = <x,y'_0> \quad \forall x \in E.$

On a donc : $<\varphi(x),y+y'> = <\varphi(x),y'> + <\varphi(x),y'> = <x,y_0> + <x,y'_0> = <x,y_0+y'_0>.$
$<\varphi(x),\lambda y> = \lambda<\varphi(x),y> = \lambda<x,y_0> = <x,\lambda y_0>.$

D'où l'application φ est linéaire.

Remarque 4.2

$\forall x,y \in E, \quad <\mathrm{Id}(x),y> = <x,y> = <x,\mathrm{Id}(y)>$. On a donc Id* = Id.

Propriétés 4.3

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien, soient $u,v \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. $(u+v)^* = u^* + v^*$.
b. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
c. $(\lambda u)^* = \lambda u^*$.
d. $(u^*)^* = u$.

Démonstration

a. $\forall x,y \in E,$
$$\begin{aligned} <(u+v)(x),y> &= <u(x)+v(x),y> \\ &= <u(x),y> + <v(x),y> \\ &= <x,u^*(y)> + <x,v^*(y)> \\ &= <x,u^*(y)+v^*(y)> = <x,(u^*+v^*)(y)>. \end{aligned}$$
b. $\forall x,y \in E,$
$$\begin{aligned} <(u \circ v)(x),y> &= <u(v(x)),y> \\ &= <v(x),u^*(y)> \\ &= <x,v^*(u^*(y))> = <x,(v^* \circ u^*)(y)>. \end{aligned}$$
c. $\forall x,y \in E,$
$$\begin{aligned} <(\lambda u)(x),y> &= <\lambda u(x),y> \\ &= \lambda<u(x),y> \\ &= \lambda<x,u^*(y)> \\ &= <x,\lambda u^*(y)> = <x,(\lambda u^*)(y)>. \end{aligned}$$
d. $\forall x,y \in E,$
$$\begin{aligned} <u^*(x),y> &= <y,u^*(x)> \\ &= <u(y),x> = <x,u(y)>. \end{aligned}$$

Propriété 4.4

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(b) = (b_1,b_2,b_3,...,b_n)$ une base orthonormale de E.
On a $\mathscr{M}_b(u^*) = {}^t\mathscr{M}_b(u)$.

Démonstration

Supposons $\mathscr{M}_b(u) = (a_{ij})_{i,j=1,n}$.

On a donc : $u(b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_j \quad \Leftrightarrow \quad < u(b_i),b_j> = a_{ji}$

$\Leftrightarrow \quad < b_i,u^*(b_j)> = a_{ji}$
$\Leftrightarrow \quad <u^*(b_j),b_i> = a_{ji}$
$\Leftrightarrow \quad u^*(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_i$
$\Leftrightarrow \quad \mathscr{M}_b(u^*) = (a_{ji})_{i,j=1,n}$.

Propriété 4.5

Soit $(E,< >)$ un espace euclidien et soit (e) une base de E.
Soient $u\in\mathscr{L}(E)$ et u^* son endomorphisme adjoint, on a $\mathscr{M}_e(u^*) = [\mathscr{M}_e(< >)]^{-1} \times [{}^t\mathscr{M}_e(u)] \times [\mathscr{M}_e(< >)]$.

Démonstration

Soit (b) une base orthonormale de E et soit S la matrice de passage de (b) à (e).
$\mathscr{M}_e(< >) = {}^tS \times \mathscr{M}_b(< >) \times S = {}^tS \times S$.
$\mathscr{M}_e(u) = S^{-1} \times \mathscr{M}_b(u) \times S$ c'est-à-dire $\mathscr{M}_b(u) = S \times \mathscr{M}_e(u) \times S^{-1}$.
$\mathscr{M}_e(u^*) = S^{-1} \times \mathscr{M}_b(u^*) \times S$.
Or $\mathscr{M}_b(u^*) = {}^t\mathscr{M}_b(u)$.
Donc $\mathscr{M}_b(u^*) = {}^t(S \times \mathscr{M}_e(u) \times S^{-1})$
$= {}^tS^{-1} \times {}^t\mathscr{M}_e(u) \times {}^tS$.
Et $\mathscr{M}_e(u^*) = S^{-1} \times \mathscr{M}_b(u^*) \times S = S^{-1} \times {}^tS^{-1} \times {}^t\mathscr{M}_e(u) \times {}^tS \times S = ({}^tS \times S)^{-1} \times {}^t\mathscr{M}_e(u) \times ({}^tS \times S)$.

Propriété 4.6

Soit $(E,< >)$ un espace euclidien et soit $u\in\mathscr{L}(E)$, on a :

- u et u^* ont même rang.
- $\det u = \det u^*$.
- u inversible $\Rightarrow$ u^* inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Démonstration

Tout ceci provient directement des propriétés des transposés de matrices.

Propriété 4.7

Soient $(E,< >)$ un espace euclidien, F un s.e.v. de E et $u\in\mathscr{L}(E)$.
Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration

$\forall y\in F$, on a $u(y)\in F$ car F est stable par u.
$x\in F^\perp \Rightarrow < x,u(y) > = 0 \quad \forall y\in F$
$\Rightarrow < u(y),x > = 0 \quad \forall y\in F$
$\Rightarrow < y,u^*(x) > = 0 \quad \forall y\in F$
$\Rightarrow u^*(x)\in F^\perp$.

Propriété - Définition 4.8

Soit $(E,< >)$ un espace euclidien et soit $u\in\mathscr{L}(E)$.
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $< u(x),u(y) > = < x,y > \quad \forall x,y\in E$.
(ii) $< u(x),u(x) > = < x,x > \quad \forall x\in E$.
(iii) $u^* \circ u = \mathrm{Id}$.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que u est une isométrie vectorielle ou que u est orthogonale.

Remarque 4.9

$(ii) \Leftrightarrow (ii)'$ $\quad \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

Démonstration

$(i) \Rightarrow (iii)$

$$
\begin{array}{lll}
 & <u(x),u(y)> = <x,y> & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & <x,u^*(u(y))> = <x,y> & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & <x,u^*(u(y)) - y> = 0 & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & u^*(u(y)) - y = 0 & \forall y \in E \quad \text{car } <> \text{ non dégénérée.} \\
\Leftrightarrow & u^*(u(y)) = y & \forall y \in E.
\end{array}
$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ $\quad \forall x \in F \ <u(x),u(x)> = <x,u^*(u(x)> = <x,x> \quad \forall x \in E$.

$(ii) \Rightarrow (i)$

$$
\begin{array}{lll}
 & <u(x+y),u(x+y)> = <x+y,x+y> & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & <u(x)+u(y),u(x)+u(y)> = <x+y,x+y> & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & <u(x),u(x)> + <u(x),u(y)> + <u(y),u(x)> + <u(y),u(y)> & \\
 & \quad = <x,x> + <x,y> + <y,x> + <y,y> & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & 2<u(x),u(y)> = 2<x,y> & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & <u(x),u(y)> = <x,y> & \forall x,y \in E.
\end{array}
$$

Propriété 4.10

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien et soit u une isométrie vectorielle.
Alors $\det u = \pm 1$ donc u est inversible et $u^* = u^{-1}$.

Démonstration

- Nous savons que $\det u = \det u^*$.
  $1 = \det \mathrm{Id} = \det(u \text{ o } u^*) = \det(u) \times \det(u^*) = \det(u)^2$.
- Unicité de l'inverse lorsqu'il existe et $u^* \text{ o } u = \mathrm{Id}$.

Propriété 4.11

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien.
L'ensemble $O(E)$ des isométries vectorielles muni de la loi de composition usuelle des fonctions vérifie :

- La loi o est une loi de composition interne sur $O(E)$.
- La loi o est associative sur $O(E)$.
- La loi o admet un élément neutre dans $O(E)$.
- Tout élément de $O(E)$ admet un symétrique pour la loi o.

On dit que $(O(E),\text{o})$ est un groupe non commutatif. Il est appelé groupe orthogonal de E.

Démonstration

- Soient $u_1,u_2 \in O(E)$.
  $$
  \begin{array}{lll}
  \forall x,y \in E, & <(u_1 \text{ o } u_2)(x),(u_1 \text{ o } u_2)(y)> & \\
   & = <u_1(u_2(x)),u_1(u_2(y))> & \\
   & = <u_2(x),u_2(y)> \quad \text{car } u_1 \in O(E) & \\
   & = <x,y> \qquad \text{car } u_2 \in O(E) & \text{donc } u_1 \text{ o } u_2 \in O(E).
  \end{array}
  $$
- La loi o est toujours associative.
- $\mathrm{Id}_E \in O(E)$.

- Soit $u_2 \in O(E)$.
  $\forall x,y \in E,\quad <u_2^{-1}(x),u_2^{-1}(y)>$
  $= <u_2(u_2^{-1}(x)),u_2(u_2^{-1}(y))>$
  $= <(u_2 \circ u_2^{-1})(x),(u_2 \circ u_2^{-1})(y)>$
  $= <x,y>$ donc $u_2^{-1} \in O(E)$.

Définition 4.12

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien.
On appelle les éléments de $O^+(E) = SO(E) = \{u \in O(E)\ /\ \det u = 1\}$ les rotations vectorielles de E.
On appelle les éléments de $O^-(E) = \{u \in O(E)\ /\ \det u = -1\}$ les anti-rotations vectorielles de E.

Propriété 4.13

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien.
$(SO(E),\circ)$ est un groupe non commutatif appelé groupe spécial orthogonal de E.

Démonstration

Cela provient directement des propriétés :
- $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$
- $\det \mathrm{Id} = 1$
- $\det(u^{-1}) = [\det(u)]^{-1}$

Propriété 4.14

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Pour que $u \in \mathscr{L}(E)$ soit une isométrie, il faut et il suffit que l'image d'une base orthonormale par u soit orthonormale.

Démonstration

Soit $(e) = (e_1,e_2,e_3,...,e_n)$ une base orthonormale de E.
($\Rightarrow$) Si u est une isométrie alors u est bijective et donc $(u(e_1),u(e_2),u(e_3),....,u(e_n))$ est une base de E.
De plus, $<u(x),u(y)> = <x,y> \quad \forall x,y \in F$.
D'où $<u(e_i),u(e_j)> = <e_i,e_j> = \delta_{ij}$.
($\Leftarrow$) Si $(u(e_1),u(e_2),u(e_3),....,u(e_n))$ base orthonormale de E, on a $<u(e_i),u(e_j)> = <e_i,e_j> = \delta_{ij}$.
$\forall x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i)$.
$<u(x),u(x)> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j <u(e_i),u(e_j)> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j <e_i,e_j> = <\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j> = <x,x>$.

Propriété 4.15

Les valeurs propres d'une isométrie sont soit 1 soit -1 (pour un e.v. réel).

Démonstration

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien et soit u une isométrie vectorielle.
Si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, on a $<x,x> = <u(x),u(x)> = <\lambda x,\lambda x> = \lambda^2 <x,x>$.
C'est-à-dire $\lambda^2 = \dfrac{<x,x>}{<x,x>} = 1$.

Propriété et définition 4.16

Soit $(\mathbb{R}^n,<>)$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $<>$ est le produit scalaire canonique et soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Les 5 propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $M.{}^tM = I_n$.

(1') (2) ${}^tM.M = I_n$.

(3) M est inversible et ${}^tM = M^{-1}$.

(2') (4) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

(5) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Une matrice qui vérifie l'une de ces conditions est dite orthogonale.

Démonstration

Soit $(e) = (e_1,e_2,e_3,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Etape 1 : (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)
  (1) $\Rightarrow$ $\det M \neq 0$ $\Leftarrow$ (2).
  On obtient le résultat à cause de l'unicité du symétrique.
- Etape 2 : (1') $\Leftrightarrow$ (4)
  $M = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ ${}^tM = (a_{ji})_{i,j=1,n}$ ${}^tM.M = (\gamma_{ij})_{i,j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$.
  Soit $(b_i)_{i=1,n}$ les vecteurs colones de M (donc les vecteurs ligne de ${}^tM$).
  On a $b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k$ et $<b_i,b_j> = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \gamma_{ij}$.
  ${}^tM.M = I_n \Leftrightarrow \gamma_{ij} = \delta_{ij} = <b_i,b_j>$.

Remarque 4.17

La matrice de passage d'une base orthonormale à une autre est une matrice orthogonale.

Propriété 4.18

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales carrées d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni de la loi de la multiplication usuelle des matrices vérifie :

- La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $O_n(\mathbb{R})$.
- La loi $\times$ est associative sur $O_n(\mathbb{R})$.
- La loi $\times$ admet un élément neutre dans $O_n(\mathbb{R})$.
- Tout élément de $O_n(\mathbb{R})$ admet un symétrique pour la loi $\times$.

On dit que $(O_n(\mathbb{R}),\times)$ est un groupe non commutatif. Il est appelé groupe orthogonal d'ordre n.

Démonstration

- Soient A et B deux matrices orthogonales.
  On a ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tA\,AB = {}^tBIB = I$ donc $AB\in O_n(\mathbb{R})$.
- La loi $\times$ est associative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- $I_n\in O_n(\mathbb{R})$.
- Soit $M\in O_n(\mathbb{R})$
  ${}^t(M^{-1}).(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}.(M^{-1}) = (M{}^tM)^{-1} = I_n{}^{-1} = I_n$ donc $M^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$

Propriété 4.19

Le déterminant d'une matrice orthogonale est ±1.

Démonstration

Soit M une matrice orthogonale.
$1 = \det I = \det {}^tMM = \det {}^tM \times \det M = \det M \times \det M = (\det M)^2$.

Propriété 4.20

Soit $O_n(\mathbb{R})^+ = SO_n(\mathbb{R}) = \{M\in O_n(\mathbb{R}) \,/\, \det M = 1\}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.
$(O_n(\mathbb{R})^+),\times)$ est un groupe non commutatif appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.

Propriété 4.21

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien. Pour que $u\in \mathscr{L}(E)$ soit une isométrie, il faut et il suffit que sa matrice dans une base orthonormale soit orthogonale.

Démonstration

Soit (e) une base orthonormale de E et soit $A = \mathscr{M}_e(u)$.

u isométrie $\Leftrightarrow$ $u^* = u^{-1}$
$\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}_e(u^*) = \mathscr{M}_e(u^{-1})$
$\Leftrightarrow$ ${}^tA = A^{-1}$ $\Leftrightarrow$ A orthogonale.

Définition 4.22

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien et soit $u\in \mathscr{L}(E)$.
On dit que u est auto-adjoint ou symétrique ssi $u = u^*$ c'est-à-dire ssi $\forall x,y\in E$, $<u(x),y> = <x,u(y)>$.

Exemple 4.23

Soit F un s.e.v. d'un espace euclidien E.
La projection orthogonale sur F et la symétrie orthogonale par rapport à F sont des endomorphismes auto-adjoints. En effet, $\forall x,x'\in E$, $\exists\, a,a'\in F$ et $\exists\, b,b'\in F^\perp$ tels que $x = a + b$ et $x' = a' + b'$. On a :

- $<p_F(x),x'> = <a ,a' + b'> = <a,a'> + <a,b'> = <a,a'>$
  $<x,p_F(x')> = <a + b,a'> = <a,a'> + <b,a'> = <a,a'>$
- $<s_F(x),x'> = <a - b,a' + b'> = <a,a'> + <a,b'> - <b,a'> - <b,b'> = <a,a'> - <b,b'>$
  $<x,s_F(x')> = <a + b,a' - b'> = <a,a'> - <a,b'> + <b,a'> - <b,b'> = <a,a'> - <b,b'>$

Propriété 4.24

Soit $(E,<>)$ un espace euclidien. Soit $(b) = (b_1,b_2,b_3,...,b_n)$ une base (orthonormale) de E.
$u\in \mathscr{L}(E)$ symétrique $\Leftrightarrow$ $\forall i,j = 1,n$, $<u(b_i),b_j> = <b_i,u(b_j)>$.

Démonstration

$(\Rightarrow)$ trivial.

$(\Leftarrow)$ $x,y\in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j b_j$.

$$<u(x),y> = < u\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i\right), \sum_{j=1}^n y_j b_j > = < \sum_{i=1}^n x_i u(b_i), \sum_{j=1}^n y_j b_j > = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j < u(b_i), b_j >$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j < b_i, u(b_j) > = <x,u(y)>.$$

Propriété 4.25

Soit $(E,<\,>)$ un espace euclidien. Pour que $u \in \mathscr{L}(E)$ soit symétrique, il faut et il suffit que sa matrice par rapport à une base orthonormale soit symétrique.

Démonstration

Soit $A = \mathscr{M}_e(u)$ où (e) est une base orthonormale de E.
u symétrique $\iff$ $u = u^*$ $\iff$ $A = {}^tA$ $\iff$ A symétrique.

Remarque 4.26

$\{u \in \mathscr{L}(E)$ / u symétrique$\}$ est un s.e.v. de $(\mathscr{L}(E),+,.)$.

Propriété 4.27

Soit A une matrice symétrique et soit P une matrice orthogonale.
Alors $A' = P^{-1}AP$ est une matrice symétrique.

Démonstration

${}^tA' = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = P^{-1}AP = A'$.

Propriété 4.28

Deux vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique réel associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Démonstration

Soit f un endomorphisme adjoint et soient u_1 et u_2 deux vecteurs propres de valeurs propres différentes respectives λ_1 et λ_2. On a donc $f(u_1) = \lambda_1 u_1$ et $f(u_2) = \lambda_2 u_2$.
D'où $\lambda_1 < u_1,u_2 > = < \lambda_1 u_1,u_2 > = < f(u_1),u_2 > = < u_1,f(u_2) > = < u_1,\lambda_2 u_2 > = \lambda_2 < u_1,u_2 >$.
Donc $(\lambda_1 - \lambda_2) < u_1,u_2 > = 0$ c'est-à-dire $< u_1,u_2 > = 0$.

Remarque 4.29

On obtient une propriété identique à la propriété 4.28 pour les matrices symétriques à coefficients réels.

Propriété 4.30

Soit $(E,<\,>)$ un espace euclidien et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ symétrique.
On a $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ et $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Démonstration

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$ et $y \in \operatorname{Im} u$.
$x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0$.
$y \in \operatorname{Im} u \iff \exists\, t \in E \,/\, u(t) = y$.
$<x,y> = <x,u(t)> = <u(x),t> = <0,t> = 0$.