Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, K est un corps commutatif (en pratique et généralement $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Espaces vectoriels, algèbres

1.1 Structure d'espace vectoriel et d'algèbre

Définition 1.1

On dit qu'un ensemble $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur K, ou un K-espace vectoriel, si et seulement si :

◊ $(E, +)$ est un groupe commutatif c'est-à-dire :
- La loi $+$ est une loi de composition interne sur E :
  $\forall x, y \in E,\ x + y \in E.$
  (On peut dire aussi que la loi $+$ est une application de $E \times E$ vers E)
- La loi $+$ est associative :
  $\forall x, y, z \in E,\ (x + y) + z = x + (y + z).$
- La loi $+$ admet un (unique) élément neutre :
  $\exists e \in E\ /\ \forall x \in E,\ x + e = e + x = x.$
- Tout élément admet un (unique) symétrique pour la loi $+$:
  $\forall x \in E,\ \exists \tilde{x} \in E\ /\ x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e.$
- La loi $+$ est commutative :
  $\forall x, y \in E,\ x + y = y + x.$

◊ La loi . est une loi de composition externe sur E à domaine d'opérateurs K c'est-à-dire :
$\forall x \in E, \forall k \in K,\ k.x \in E.$
(On peut dire aussi que la loi . est une application de $K \times E$ vers E)

◊ La loi . verifie : $\forall \alpha, \beta \in K$ et $\forall u, v \in E$,
- $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$
- $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$
- $\alpha.(\beta.u) = (\alpha \times \beta).u$
- $1.u = u$

Remarques 1.2

- Si E est un K-e.v., les éléments de E sont appelés des vecteurs et ceux de K sont appelés des scalaires.
- L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$ ou plus simplement 0.
- Par abus, on ne note généralement pas la loi "." et on dit que E est un K-e.v. sans préciser les lois.
- Soient u et v deux vecteurs d'un K-e.v. E.
  On définit $u - v$ par $u + (-v)$ où $-v$ désigne le symétrique de v pour la loi interne de E.

Exemples 1.3

- L'ensemble des vecteurs du plan ou l'ensemble des vecteurs de l'espace.
- L'ensemble des suites numériques.

Propriété 1.4

Soit E un espace vectoriel sur K. Pour tout scalaire α et pour tous vecteurs u et v, on a :

- $0_K\, u = 0_E$.
- $\alpha\, 0_E = 0_E$.
- $\alpha u = 0_E \iff \alpha = 0_K$ ou $u = 0_E$.
- $\alpha(-u) = (-\alpha)\, u = -(\alpha u)$.
- $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Remarques 1.5

- On a donc $(-1).u = -(1.u) = -u$.
- Si E est un espace vectoriel sur K, E est également un espace vectoriel sur tout sous-corps K' de K. Par exemple, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  Si $K' \neq K$, ces deux espaces vectoriels doivent être considérés comme différents.

Définition 1.6

On dit qu'un ensemble $(E, +, \times, .)$ est une algèbre sur K ou une K-algèbre si :

- $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur K.
- $(E, +, \times)$ est un anneau.
- Pour tous u, v de E et tout λ de K, $\lambda.(u\times v) = (\lambda.u)\times v = u\times(\lambda.v)$.

Si de plus la loi $\times$ est commutative, l'algèbre E est dite commutative.

Remarque 1.7

Par abus, on ne note pas les lois.
Ce qui donne : $\lambda\,(u\,v) = (\lambda\, u)\, v = u\,(\lambda\, v)$.

Exemples 1.8

- K est un espace vectoriel sur lui-même, la loi externe étant ici le produit de K.
  C'est même une algèbre commutative.
- Soient X un ensemble non vide quelconque et E un K-espace vectoriel.
  Soit $\mathscr{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les fonctions f de X dans E.
  $\mathscr{F}(X, E)$ est un K-espace vectoriel avec les lois:
  $\forall f\in \mathscr{F}(X, E)$, $\forall g\in \mathscr{F}(X, E)$, $\forall \lambda\in K$, $\forall x\in X$,
  i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
  ii) $(\lambda\, f)(x) = \lambda\, f(x)$.
  Le vecteur nul est ici l'application nulle ω définie par $\forall x\in E$, $\omega(x) = 0$.
  Si E est une algèbre, on définit un produit dans $\mathscr{F}(X, E)$ en posant :
  $\forall f\in \mathscr{F}(X, E)$, $\forall g\in \mathscr{F}(X, E)$, $\forall x\in X$, $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$.
  $\mathscr{F}(X, E)$ est alors muni d'une structure d'algèbre sur K.
- L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K est une K-algèbre commutative.
- L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes, p colonnes, et à coefficients dans K est un espace vectoriel sur K.
  Si $n = p$, c'est une algèbre sur K, non commutative dès que $n \geq 2$.

Propriété 1.9

Soient E_1, E_2, ... , E_n une famille de n espaces vectoriels sur un même corps K.
Soit E l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \ ... \ \times E_n$.
E est un espace vectoriel sur K lorsqu'on le munit des lois suivantes :

$\forall u = (u_1, u_2, \dots , u_n) \in E$, $\forall v = (v_1, v_2, \dots , v_n) \in E$, $\forall \lambda \in K$

i) $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots , u_n + v_n)$.

ii) $\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots , \lambda u_n)$.

Démonstration

Pas de difficulté particulière, il suffit de vérifier les 10 points de la définition : c'est donc un peu long à rédiger.

Remarques 1.10

- Attentions aux lois.
- Si E est un K-espace vectoriel, E^n ($n \geq 2$) est donc muni d'une structure de K-espace vectoriel.
- On en déduit la structure d'espace vectoriel de $K^n = \{(x_1, x_2, \dots , x_n) \text{ où } x_i \in K\}$.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 1.11

Soit $(A, +)$ un monoïde additif.
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A.
On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est à support fini si l'ensemble des indices i de I tels que $a_i \neq 0$ est fini.
Pour une telle famille, on peut donc considérer $\sum\limits_{i\in I} a_i$, qu'on appelle somme à support fini.
On note parfois $A^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini d'éléments de A.

Définition 1.12

Soient E un espace vectoriel sur K, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini d'éléments de K.
La somme $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i u_i$ est appelée combinaison linéaire (C.L.) des vecteurs u_i avec les coefficients λ_i.

Exemple 1.13

Soit $\mathscr{F} = (1, X, X^2, \dots , X^p, \dots) = (X^i)_{i\in \mathbb{N}}$.
La famille $\mathscr{F}$ est infinie mais tout polynôme est une C.L. de cette famille.

Remarque 1.14

Si $u = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i u_i$ est une C.L. des u_i alors il existe $J \subset I$ tel que J fini et $u = \sum\limits_{i\in J} \lambda_i u_i$.
On peut généralement considérer un réindicage de façon à avoir $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$.

2. Sous-espaces vectoriels et sous-algèbres

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 2.1

Soit E un espace vectoriel sur K. Soit F une partie de E.
On dit que F est un sous espace vectoriel (s.e.v.) de E si, muni des lois induites, F est un espace vectoriel.

Remarques 2.2

- On dit parfois sous-espace plutôt que s.e.v.
- $\{0\}$ et E sont deux s.e.v. de E, appelés sous-espaces triviaux.

Exemples 2.3

- $\mathbb{R}$ est un s.e.v. de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-e.v.
- Les vecteurs d'un plan forment un s.e.v. des vecteurs de l'espace.

Propriété 2.4

Soient E un espace vectoriel sur K, et F une partie de E. F est un s.e.v. de E si et seulement si

1) $F \neq \varnothing$.
2) $\forall u, v \in F, u + v \in F$ (F est stable par addition).
3) $\forall \lambda \in K, \forall u \in F, \lambda u \in F$ (F est stable par multiplication par un scalaire).

ou encore si et seulement si

1′) $F \neq \varnothing$.
2′) $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in K, \quad \lambda u + \mu v \in F$.

ou encore si et seulement si

1″) $F \neq \varnothing$.
2″) $\forall (\lambda_i)_{i\in I}$ famille à support fini d'éléments de K, $\forall (x_i)_{i\in I} \in F$, $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in F$ (F est stable par C.L.).

Remarques 2.5

- Dans les caractérisations précédentes, on n'oubliera pas la condition $F \neq \varnothing$.
  En général, on se contente de vérifier que le vecteur nul 0 de E appartient à F.
  En effet, tout s.e.v. de E contient au moins 0.
- Soit F un s.e.v. de E.
  On se rend compte de l'utilité qu'une C.L. soit finie pour que F soit stable par combinaisons linéaires.
- Si F est un s.e.v. de E et si G est un s.e.v. de F, alors G est un s.e.v. de E (avec les mêmes lois).
  Plus précisément, la relation "être un s.e.v. de" est une relation d'ordre.

Exemples 2.6

- Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.
- Plus généralement, pour tout entier naturel n, l'ensemble $K_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v. de $K[X]$.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point ou $\mathbb{R}$ tout entier.
  Soit $\mathscr{F}(I, K)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions de I dans K.
  Les sous-ensembles suivants sont des s.e.v. de $\mathscr{F}(I, K)$:
    L'ensemble $\mathscr{C}(I, K) = \mathscr{C}^0(I, K)$ des fonctions continues de I dans K.
    L'ensemble $\mathscr{D}(I, K)$ des fonctions dérivables de I dans K.
    L'ensemble $\mathscr{C}^k(I, K)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ de I dans K pour tout entier positif k.
    L'ensemble $\mathscr{C}^\infty(I, K)$ des fonctions infiniment dérivable de I dans K.

Définition 2.7

Soit E une algèbre sur K. Soit F une partie de E.
On dit que F est une sous-algèbre de E si :
- $(F, +, .)$ est un s.e.v. de $(E, +, .)$.
- $(F, +, \times)$ est un sous-anneau de $(E, +, \times)$.

Remarque 2.8

Muni des lois induites, F est donc effectivement une algèbre sur K.

Propriété 2.9

Soient E une algèbre sur K, et F une partie de E. On note 1_E le neutre multiplicatif de E.
F est une sous-algèbre de E si et seulement si :
- $1_E \in F$ (ce qui implique que $F \neq \emptyset$).
- $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in K, \lambda u + \mu v \in F$.
- $\forall u, v \in F, uv \in F$.

Exemple 2.10

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(K)$.

2.2 Opérations entre s.e.v.

Propriété 2.11

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de s.e.v. d'un K-e.v. E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v. de E.

Définition et propriété 2.12

Soit X une partie quelconque d'un K-espace vectoriel E.
On appelle sous-espace engendré par X et on note $\mathrm{Vect}(X)$ ou $\langle X \rangle$ le plus petit (au sens de l'inclusion) des s.e.v. de E qui contient X.

Remarque 2.13

$\mathrm{Vect}(X)$ est l'intersection de tous les s.e.v. de E qui contiennent X.
En effet, soit G l'intersection de tous les s.e.v. de E qui contiennent X.
Donc G est inclus dans tout s.e.v. de E qui contient X.
On sait que G est aussi lui-même un s.e.v. et c'est nécessairement le plus petit.

Propriété 2.14

Soit X une partie non vide d'un K-espace vectoriel E.
Vect(X) est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

Propriété 2.15

Soit $\mathscr{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ une famille finie de n ($\in\mathbb{N}^*$) s.e.v. d'un K-e.v. E.
Soit $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ l'ensemble des vecteurs de la forme $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ où $u_i \in F_i$ pour tout $i = 1, n$.
F est un s.e.v. de E, appelé somme des F_i.

Remarques 2.16

- Avec les notations de la propriété, F peut être noté $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$.
- Si F et G sont deux s.e.v. d'un K-e.v. E, $F + G = \{u + v, u\in F, v\in G\}$.
- On peut étendre la définition de somme à une famille $(F_i)_{i\in I}$ quelconque de s.e.v. de E.
  Dans ce cas, la somme des F_i est l'ensemble F des sommes à support fini $\sum\limits_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i\in F_i$.
- Si F et G sont deux s.e.v. de E, leur réunion $H = F \cup G$ n'est un s.e.v. de E que si $F \subset G$ auquel cas $H = G$, ou si $G \subset F$ auquel cas $H = F$.
- En général, une réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est donc pas un sous-espace de E.

Propriété 2.17

Soit $\mathscr{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ une famille finie de n ($\in\mathbb{N}^*$) s.e.v. d'un K-e.v. E.
La somme $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les F_i.
C'est le s.e.v. de E engendré par la réunion des F_i c'est-à-dire $F = \text{Vect}(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n)$.

2.3 Sommes directes

Définition 2.18

Soit une famille finie $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de s.e.v. d'un K-e.v. E.
On dit que la somme $F = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe si tout vecteur v de F s'écrit de manière unique sous la forme $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, où pour tout $i = 1, n$, $v_i\in F_i$.
On dit que v_i est la composante de v sur F_i relativement à cette somme directe.
La somme F est alors notée $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$.

Remarque 2.19

Si $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de s.e.v. d'un K-e.v. E.
On a une définition similaire : la somme $F = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est directe si tout vecteur v de F s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme à support fini $\sum\limits_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i\in F_i$.
La somme F est alors notée $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$.

Propriété 2.20

Soit $\mathscr{F} = (F_1, F_2, \dots , F_n)$ une famille finie de s.e.v. d'un K-e.v. E.
La somme $F = \sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si :
$\forall (u_1, u_2, \dots , u_n) \in \prod_{i=1}^{n} F_i$, on a $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0 \Rightarrow u_i = 0 \ \ \forall i = 1, n$.

Remarque 2.21

On peut étendre ce résultat à une famille $(F_i)_{i\in I}$ quelconque de s.e.v. de E.
Dans ce cas, la somme $F = \sum_{i\in I} F_i$ est directe si et seulement si :
Pour toute famille (u_i) à support fini ($u_i \in F_i$ pour tout i), $\sum_{i\in I} u_i = 0 \Rightarrow \forall i\in I, u_i = 0$.

Propriété 2.22

Soient F et G deux s.e.v. de E.
La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Remarques 2.23

- Si la somme $\sum_{i\in I} F_i$ est directe, et si J est une partie de I, alors $\sum_{i\in J} F_i$ est directe.
  En particulier, pour tous les indices distincts i et j, $F_i \cap F_j = \{0\}$.
- La réciproque est fausse.
  Pour monter que $F_1, F_2, \dots , F_n$ sont en somme directe, avec $n \geq 3$, il ne suffit pas de vérifier que pour tous indices distincts i et j, $F_i \cap F_j = \{0\}$.
  Ce serait encore pire de se contenter de vérifier que $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = \{0\}$.
- Une erreur classique consiste à écrire que la somme $F + G$ est directe si et seulement si l'intersection $F \cap G$ est vide!
  L'intersection de deux s.e.v. de E n'est en effet jamais vide car elle contient toujours 0.
  Il faut en fait vérifier que l'intersection $F \cap G$ se réduit à $\{0\}$.

2.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.24

Soient F et G deux s.e.v. de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.
Cela signifie que tout vecteur u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

Théorème 2.25

Soit F un s.e.v. de E.
Alors F possède au moins un supplémentaire dans E.

Remarques 2.26

- Ce résultat est admis pour l'instant. Il sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.

- Un même sous-espace F de E possède en général une infinité de supplémentaires dans E.
Il y a cependant deux cas d'unicité :
Si $F = E$, le seul supplémentaire de F dans E est $\{0\}$.
Si $F = \{0\}$, le seul supplémentaire de F dans E est E lui-même.
- On ne confondra pas supplémentaire et complémentaire!
Le complémentaire d'un sous-espace F de E est un ensemble sans grand intérêt en algèbre linéaire : ce n'est pas un s.e.v. de E car il ne contient pas le vecteur nul.

Exemples 2.27

- Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, les sous-espaces $S_n(K)$ et $A_n(K)$ formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.
- Dans l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $I(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés respectivement des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

3. Applications linéaires

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K et soit f une application de E dans F.
On dit que f est linéaire si et seulement si : $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in K,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Remarques 3.2

- On dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels.
- f est linéaire de E dans F si et seulement si, $\forall u,v \in E, \forall \alpha,\beta \in K,\ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.
- Si f est linéaire, alors $f(\sum_{i\in I} \lambda_i u_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(u_i)$ pour toute combinaison linéaire.
Dans le cas fini, cela donne :
$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n)$$
$$= f(\lambda_1 u_1) + f(\lambda_2 u_2) + \ldots + f(\lambda_n u_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i).$$
- Si f est linéaire de E dans F, alors $f(0_E) = 0_F$.
En effet, $f(0_E) = f(0_K.0_E) = 0_K.f(0_E) = 0_F$.
Cette remarque est parfois utilisée pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Définitions 3.3

- On note $\mathscr{L}_K(E, F)$ ou $\mathscr{L}(E, F)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps K l'ensemble des applications linéaires du K-e.v. E dans le K-e.v. F.
- Un endomorphisme d'un K-e.v. E est une application linéaire de E dans lui-même.
On note $\mathscr{L}_K(E)$ ou $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme d'un K-e.v. E est un isomorphisme de E dans lui-même.
On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exemples 3.4

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.

- L'application nulle de E dans F est linéaire.
- L'application identité Id_E est un automorphisme de E.
- Pour tout scalaire λ, l'application $h_\lambda : u \mapsto \lambda u$ est un endomorphisme de E.
  Pour tous scalaires λ et μ, $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.
  Si $\lambda \neq 0$, h_λ un automorphisme et alors $(h_\lambda)^{-1} = h_{1/\lambda}$.
  Si $\lambda \neq 0$, on dit que h_λ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.
  L'application qui, à une fonction f de I dans $\mathbb{R}$, associe sa dérivée f' est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur I dans $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
  La restriction de cette application à $E = \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un endomorphisme de E.

3.2 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 3.5

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K.
Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, et α, β deux scalaires.
Alors $\alpha f + \beta g$ est aussi une application linéaire de E dans F.
On en déduit que $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur K.

Propriété 3.6

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un même corps K.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Remarques 3.7

- Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un même corps K.
  Si $f \in \mathscr{L}(F, G)$ et si $g, h \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$. En effet :
  $\forall x \in E$, $[f \circ (g + h)](x) = f\,[(g + h)(x)] = f\,[g(x) + h(x)] = f\,[g(x)] + f\,[h(x)] = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)$
- Soit f un endomorphisme de E et n un entier naturel.
  Avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^1 = f$, on a $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois) est un endomorphisme de E.
- Dans l'algèbre $\mathscr{L}(E)$, on peut utiliser la formule du binôme $(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^k \circ g^{n-k})$, à condition que les applications f et g commutent.
- Par exemple, les applications h_λ commutent avec tous les endomorphismes de E.

Propriété 3.8

Soit f un isomorphisme de E sur F. Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Remarque 3.9

Si f et g sont deux automorphismes d'un K-e.v. E, alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E.
On en déduit que $(\mathscr{L}(E), +, \circ, .)$ est une algèbre sur K. En général, cette algèbre n'est pas commutative.
En particulier, $GL(E)$ est un groupe (en général, non commutatif) pour la loi de composition des applications.

3.3 Noyau et image

Propriété 3.10

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. Soit f un morphisme de E dans F.

- Si E' est un sous-espace de E, alors $f(E')$ est un sous-espace de F.
- Si F' est un sous-espace de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace de E.

Définition 3.11

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. Soit f un morphisme de E vers F.

- L'ensemble $f(E) = \{v\in F \,/\, \exists\, u\in E$ et $v = f(u)\} = \{f(u),\, u\in E\}$ est un s.e.v. de F.
  On l'appelle image de f et on le note $\mathrm{Im}\, f$.
- L'ensemble $f^{-1}(\{0_F\}) = \{u\in E,\, f(u) = 0_F\}$ est un s.e.v. de E.
  On l'appelle noyau de f et on le note $\mathrm{Ker}\, f$.

Remarque 3.12

On peut parfois montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un s.e.v. en l'interprétant comme le noyau ou l'image d'une application linéaire.
Par exemple, soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et soit λ un scalaire.
Notons E_λ l'ensemble des vecteurs u de E tels que $f(u) = \lambda u$.
On constate que $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda\, \mathrm{Id})(u) = 0 \Leftrightarrow u\in \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id})$.
On en déduit que E_λ est un s.e.v. de E.
C'est le cas en particulier pour $\mathrm{Inv}(f) = E_1$ (vecteurs invariants) et pour $\mathrm{Opp}(f) = E_{-1}$ (vecteurs changés en leur opposé par f).

Propriété 3.13

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. Soit f un morphisme de E dans F.
f est injective si et seulement si son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ se réduit à $\{0_E\}$.

Remarque 3.14

Autrement dit, f est injective si et seulement si $(\forall u\in E)\ f(u) = 0_F \Rightarrow u = 0_E$.

3.4 Projections et symétries vectorielles

Définition 3.15

Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E.
Pour tout vecteur u de E : $\exists! v\in F$, $\exists! w\in G$ tels que $u = v + w$.

- L'application $p : u \mapsto p(u) = v$ est la projection sur F, parallèlement à G.
- L'application $s : u \mapsto s(u) = v - w$ est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

Remarques 3.16

Avec les notations précédentes,

- p est un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$. L'image de p est F et son noyau est G.
  F est aussi le s.e.v. des vecteurs invariants par p.

- s est un automorphisme de E, et $s \circ s =$ Id. Ainsi s est involutif : $s^{-1} = s$.
  On a la relation $s = 2p -$ Id, qui s'écrit encore $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id})$.
  G est le sous-espace des vecteurs changés en leur opposé par s.
  F est le sous-espace des vecteurs invariants par s.
- Si on note p' la projection sur G parallèlement à F, et s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F, alors $p + p' = \text{Id}$, $p \circ p' = p' \circ p = 0$ et $s + s' = 0$, $s \circ s' = s' \circ s = -\text{Id}$.

Exemple 3.17

On considère la somme directe $E = E \oplus \{0\}$.
On pose $F = E$ et $G = \{0\}$. Pour tout $u \in E$, on a $u = u + 0$.
Soient p la projection sur F parallèlement à G
s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
p' la projection sur G parallèlement à F
s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F.
On obtient : $p = \text{Id}$ (c'est le seul cas où une projection vectorielle est injective)
$p' = 0$
$s = \text{Id}$
$s' = -\text{Id}$

Définition 3.18

Soit E un espace vectoriel sur K.
On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Propriété 3.19

Si p est un projecteur de E, alors $E = \text{Ker}\, p \oplus \text{Im}\, p$.
L'application p est la projection sur $\text{Im}\, p$ parallèlement à $\text{Ker}\, p$.

Démonstration

Soit p un projecteur de E. Pour tout $u \in E$, on a $u = u - p(u) + p(u)$.
On a bien $p(u) \in \text{Im}\, p$.
$p(u - p(u)) = p(u) - p(p(u)) = p(u) - p(u) = 0$ donc $u - p(u) \in \text{Ker}\, p$.
C'est-à-dire $E = \text{Ker}\, p + \text{Im}\, p$.
Il reste à vérifier que $\text{Ker}\, p \cap \text{Im}\, p = \{0\}$.
Soit $u \in \text{Ker}\, p \cap \text{Im}\, p$.
$u \in \text{Im}\, p \Rightarrow \exists\, t \in E \;/\; u = p(t)$.
$u \in \text{Ker}\, p \Rightarrow p(u) = 0 \Rightarrow p(p(t)) = 0 \Rightarrow p(t) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Remarque 3.20

On ne généralisera pas abusivement la propriété $E = \text{Ker}\, p \oplus \text{Im}\, p$.
Si f est un endomorphisme de E tout est en effet possible entre $\text{Im}\, f$ et $\text{Ker}\, f$.
Par exemple, l'inclusion $\text{Im}\, f \subset \text{Ker}\, f$ équivaut à $f \circ f = 0$.
On montre que $E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$ équivaut à $\text{Ker}\, f^2 = \text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f^2 = \text{Im}\, f$
ce qui n'équivaut pas à $f^2 = f$.

4. Familles libres, génératrices, bases

Toutes les sommes considérées dans cette partie sont à support fini.

4.1 Familles libres

Définition 4.1

Soit E un espace vectoriel sur K.
On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est libre, ou encore que les vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants si, pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $K^{(I)}$ (c'est-à-dire à support fini), nous avons : $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$, on dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée, ou encore que les vecteurs qui la composent sont linéairement dépendants.

Remarques 4.2

- On ne doit pas confondre non tous nuls et tous non nuls.
- La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre si $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.
- La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est liée si :
  Il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, l'un au moins étant non nul, tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.
  Si, par exemple, $\lambda_1 \neq 0$, alors $u_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i u_i$.
- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs qui la compose peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.
- Une famille réduite à un seul vecteur u est libre si et seulement si u est non nul.
- Une famille de deux vecteurs u et v est liée si et seulement si u et v sont colinéaires, ou encore proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.
  Cela ne se généralise pas aux familles de plus de deux vecteurs.
- Attention à ne pas dire que u et v sont liés si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$, car c'est faux si $v = 0$ et $u \neq 0$ (en revanche c'est vrai si $v \neq 0$).
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
  Cela équivaut à dire que toute sur-famille d'une famille liée est liée.
  En particulier toute famille contenant 0, ou deux vecteurs colinéaires, est liée.
- Dans l'espace vectoriel $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K, toute famille de polynômes dont les degrés sont différents deux à deux est libre.
  C'est le cas pour la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\deg P_0 < \deg P_1 < \dots < \deg P_n < \dots$
  On parle alors de famille de polynômes à degrés échelonnés.

Propriétés 4.3

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et f un morphisme de E dans F.
Soit $(u_i)_{i=1,p}$ une famille finie d'éléments de E.

- Si la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i=1,p}$ est liée.
- Si la famille $(f(u_i))_{i=1,p}$ est libre, la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est libre.
- Si la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(u_i))_{i=1,p}$ est libre.

Remarque 4.4

On peut étendre ces résultats à une famille quelconque $(u_i)_{i\in I}$:

- Toute application linéaire transforme une famille liée en une famille liée.
- Une application linéaire injective transforme une famille libre en une famille libre.

4.2 Familles génératrices

Définition 4.5

Soit E un espace vectoriel sur K.
On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice, ou encore que les vecteurs de cette famille engendrent E si et seulement $\mathrm{Vect}(\{u_i,\ i\in I\}) = E$.
C'est-à-dire : $\forall v\in E,\ \exists\,(\lambda_i)_{i\in I}\in K^{(I)}\ /\ v = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i$.

Remarques 4.6

- La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice dans E si :
  Pour tout vecteur v de E, il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i$.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice.
- Soient E un espace vectoriel sur K et F un s.e.v. strict de E ($F \subsetneq E$).
  Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.
  Rappel : le caractère libre ou non de cette famille ne dépend pas de l'espace vectoriel, F ou E, auxquel elle est censée appartenir.
  En revanche, si cette famille est génératrice dans F, elle ne l'est pas dans E.
  Lorsqu'il y a un risque d'ambiguïté, on précisera donc dans quel espace vectoriel une famille de vecteurs est génératrice.

Propriété 4.7

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.
Soit f un morphisme de E dans F.
Soit $(u_i)_{i=1,p}$ une famille finie de E.

- Si la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est génératrice (de E) alors la famille $(f(u_i))_{i=1,p}$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.
- Si la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est génératrice (de E) et si f est surjective, alors la famille $(f(u_i))_{i=1,p}$ est génératrice de F.

Remarque 4.8

On peut étendre ces résultats à une famille quelconque $(u_i)_{i\in I}$.
On peut donc dire qu'une application linéaire surjective transforme une famille génératrice en une famille génératrice.

4.3 Bases

Définition 4.9

Soit E un espace vectoriel sur K.
On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Propriété 4.10

Une famille $(u) = (u_1, u_2, ... , u_n)$ est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur v de E, il existe un n-uplet unique $(\lambda_1, ... , \lambda_n)$ de K^n tel que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.
Les coefficients λ_i sont appelés composantes, ou coordonnées, de v dans la base $(u_i)_{i = 1, n}$.

Remarques 4.11

- Une famille (quelconque) $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs u_i.
- Si (i, j, k) forment une base de E, et si les coordonnées d'un vecteur v dans cette base sont (a, b, c) (c'est-à-dire si $v = ai + bj + ck$), alors (j, k, i) forment une base de E dans laquelle les coordonnées de v sont (b, c, a).
  Conclusion : deux bases se déduisant l'une de l'autre par modification de l'ordre des vecteurs doivent être considérées comme différentes.
- La famille des polynômes $(X^k)_{k\in \mathbb{N}} = (1, X, X^2, ... , X^i, ...)$ est une base de $K[X]$.
  On l'appelle la base canonique de $K[X]$.
- La famille des polynômes $(X^k)_{k = 0, n} = (1, X, X^2, ... , X^n)$ est la base canonique de $K_n[X]$.

Propriétés 4.12

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.
On suppose que E est muni d'une base $(e_i)_{i = 1, n}$.
Pour toute famille $(v_i)_{i = 1, n}$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall i = 1,n,\ f(e_i) = v_i$. De plus :

- f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i = 1, n}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i = 1, n}$ est génératrice de F.
- f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i = 1, n}$ est une base de F.

Remarque 4.13

Un morphisme f de E vers F est un isomorphisme si et seulement si f transforme une base de E en une base de F. L'application f transforme alors toute base de E en une base de F.

5. Espaces vectoriels de dimension finie

5.1 Notion de dimension finie

Définition 5.1

Soit E un K-espace vectoriel.
On dit que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

Remarques 5.2

- Avec cette définition, l'espace réduit à $\{0\}$ est de dimension finie.
- Si un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, il est dit de dimension infinie.
  C'est le cas de l'espace vectoriel $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K.

Théorème 5.3

Dans tout espace vectoriel E de dimension fini non réduit à $\{0\}$, il existe des bases.

Remarque 5.4

On a précisé $E \neq \{0\}$ car dans l'espace $\{0\}$ il n'y a même pas de famille libre!

Corollaire 5.5

De toute famille génératrice d'un espace vectoriel non nul de dimension finie, on peut extraire une base.

Propriété 5.6

Soit E un espace vectoriel sur K.
Soit $(e_i)_{i=1,n} = \{e_1, e_2, \dots , e_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
Si $(e_i)_{i=1,n}$ est génératrice dans E, toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.

Corollaire 5.7

Soit E un espace vectoriel sur K.
Soit $(e_i)_{i=1,n} = \{e_1, e_2, \dots , e_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
Si $(e_i)_{i=1,n}$ est libre, aucune famille de moins de n vecteurs n'est génératrice dans E.

Théorème 5.8

Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, alors toutes les bases de E sont finies et elles ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E et est noté $\dim E$.

Remarques 5.9

- Par convention, $\dim \{0\} = 0$.
- On appelle droite vectorielle tout espace vectoriel E de dimension 1.
  Tout vecteur non nul u de E constitue alors une base de E, et $E = \{\lambda u, \lambda \in K\}$.
- On appelle plan vectoriel tout espace vectoriel E de dimension 2.
  Deux vecteurs u et v non proportionnels forment alors une base de E et
  $E = \{\lambda u + \mu v, \lambda \in K, \mu \in K\}$.
- La dimension d'un espace vectoriel E dépend du corps de base.
  Si E est un espace de dim n sur $\mathbb{C}$, c'est un espace de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$.
  Par exemple, $\mathbb{C}$ est une droite vectorielle sur $\mathbb{C}$ et un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$.
  Pour éviter toute ambiguïté, on note parfois $\dim_K(E)$.

Exemples 5.10

- K^n est un espace vectoriel sur K, de dimension n.
  Une base de K^n est la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$, où $e_1 = (1, 0, \dots , 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots , 0)$, ... ,
  $e_n = (0, \dots , 0, 1)$.
  On l'appelle la base canonique de K^n.
  Les coordonnées de $u = (x_1, \dots , x_n)$ dans cette base sont $(x_1, \dots , x_n)$, car $u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

- L'ensemble $K_n[X]$ des polynômes à coefficients dans K et de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel sur K, de dimension $n + 1$.
  Une base de $K_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, alors l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est de dimension $n \times p$.
- Soient E et F deux K-e.v. de dimensions respectives n et p.
  On a $\dim(E \times F) = n + p$.
  Plus généralement : $\dim(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i)$ et $\dim(E^m) = m \times \dim(E)$.

Théorème 5.11 Théorème de la base incomplète

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit (e) une famille génératrice finie de E.
Soit (u) une famille libre de E, non génératrice. Alors il est possible de compléter la famille (u) à l'aide de vecteurs de la famille (e), de manière à former une base de E.

Propriété 5.12

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Soit $(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de n éléments de E.
(u) est une base $\Leftrightarrow$ (u) est libre $\Leftrightarrow$ (u) est génératrice.

Remarque 5.13

La dimension d'un espace vectoriel est donc :
Le nombre minimum d'éléments d'une famille génératrice de cet e.v.
Le nombre maximum d'éléments d'une famille libre de cet e.v.

Définition 5.14

Soit $(u_i)_{i=1,p} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur K.
On appelle rang de la famille $(u_i)_{i=1,p}$ et on note $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ la dimension du s.e.v. de E engendré par cette famille.
C'est-à-dire, $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_p\})$.

Remarques 5.15

- $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est le nombre maximal de vecteurs libres de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
- On a $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \leq p$, avec l'égalité si et seulement si la famille (u) est libre.
- Si $\dim(E) = n$, alors $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \leq n$, avec l'égalité si et seulement si la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est génératrice dans E.

5.2 Sous-espaces de dimension finie

Propriété 5.16

Soit F un s.e.v. d'un K-e.v. E de dimension finie.
Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
On a l'égalité $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Propriété 5.17

Soient F et G deux s.e.v. de dimensions finies d'un K-e.v. E.

- Dans le cas général, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Corollaire 5.18

Soient $F_1, F_2, \dots , F_p$ une famille de p s.e.v. de dimension finie d'un K-e.v. E.

- On a toujours $\dim(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.
- On a l'égalité $\dim(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ si et seulement si la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

Propriétés 5.19

Soit E un K-espace vectoriel (de dimension ≥ 1).
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie, en somme directe.
Soit $(e') = (e'_1, e'_2, \dots., e'_p)$ une famille finie d'éléments de F.
Soit $(e'') = (e''_1, e''_2, \dots., e''_q)$ une famille finie d'éléments de G.
On forme la famille $(e) = (e') \cup (e'')$ en juxtaposant les familles (e') et (e'').

- Si les familles (e') et (e'') sont libres, alors la famille (e) est libre.
- Si (e') engendre F et (e'') engendre G, alors (e) engendre $F \oplus G$.
- Si (e') est une base de F et si (e'') est une base de G, alors (e) est une base de $F \oplus G$.

Corollaire 5.20

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Soient $F_1, F_2, \dots , F_p$ des sous-espaces de E, de dimension finie, en somme directe.
Pour tout j de $\{1, \dots , p\}$, soit $(e)_j$ une famille de vecteurs de F_j.
On forme la famille $(e) = (e)_1 \cup (e)_2 \cup \dots \cup (e)_p$ en juxtaposant les familles $(e)_j$.

- Si chaque famille $(e)_j$ est libre, la famille (e) est libre.
- Si chaque $(e)_j$ engendre le sous-espace F_j correspondant, (e) engendre $\bigoplus F_j$.
- Si chaque $(e)_j$ est une base du sous-espace F_j correspondant, (e) est une base de $\bigoplus F_j$.
  Ceci est particulièrement intéressant si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, car on obtient alors une base de E, qui est dite adaptée à la somme directe.

Remarque 5.21

Soient $F_1, F_2, \dots , F_p$ des sous-espaces de E, de dimension finie, qui ne sont pas en somme directe.
Même si chaque $(e)_j$ est une base du sous-espace F_j correspondant, (e) n'est pas nécessairement une famille libre.

5.3 Applications linéaires et dimension finie

Propriété 5.22

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K, E étant de dimension finie.
Alors E et F sont isomorphes (c'est-à-dire il existe un isomorphisme de E sur F) si et seulement si F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Démonstration

(⇒) Proposition 4.12
(⇐) On choisit une base de E et une base de F et on considère l'application qui au premier élément de la base de E (s'il existe) associe le premier élément de la base de F (s'il existe). Au deuxième, le deuxième etc....

Exemple 5.23

L'isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(aX^2 + bX + c) = (c,b,a)$.

Remarque 5.24

Tout K-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, est isomorphe à K^n.
Si $(u) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E, l'application φ définie par $\varphi((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, u_k$ est un isomorphisme de K^n sur E. L'existence d'un tel isomorphisme fait de K^n l'exemple-type du K-espace vectoriel de dimension n sur K, sa base canonique étant la base la plus naturelle.

Théorème 5.25 Théorème de la dimension

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, E étant de dimension finie.
Soit f une application linéaire de E dans F.
Alors Im(f) est un s.e.v. de dimension finie de F et on a l'égalité : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Remarques 5.26

- On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}\,f$ la dimension de $\mathrm{Im}\,f$.
  On a donc : $\dim E = \mathrm{rg}\,f + \dim \mathrm{Ker}\,f$.
  C'est pourquoi le résultat précédent est souvent appelé théorème du rang.
- On a $\mathrm{rg}\,f \leq \dim E$ avec l'égalité si et seulement si f est injective.
- Si F est de dimension finie, on a $\mathrm{rg}\,f \leq \dim F$ avec l'égalité si et seulement si f est surjective.
- Les notions de rang d'une application linéaire et de rang d'une famille de vecteurs se rejoignent.
  Pour toute base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E, $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\,(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Propriété 5.27

Soient E et F deux K-espace vectoriels de même dimension.
Soit f une application linéaire de E dans F.
f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ f est injective
$\Leftrightarrow$ f est surjective.

5.4 Codimension d'un espace vectoriel

La notion de codimension est un complément facultatif.

Définition 5.28

Soient E un K-espace vectoriel et F un s.e.v. de E.
On dit que F est de codimension finie si F admet un supplémentaire G de dimension finie.
On note alors $\mathrm{codim}\,F = \dim G$.

Remarques 5.29

- La définition précédente ne dépend pas du supplémentaire choisi pour F car ils tous isomorphes entre eux.
- Si E est de dimension finie tous les sous-espaces F de E sont de codimension finie et $\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$.

6. Formes linéaires, hyperplans, dualité

6.1 Formes linéaires, espace dual

Définition 6.1

Soit E un espace vectoriel sur K. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K.
On note E^* l'ensemble de s formes linéaires sur E, c'est-à-dire $\mathscr{L}(E, K)$.
E^* est appelé le dual de E.

Remarques 6.2

- E^* possède une structure d'espace vectoriel sur K.
- Soit f une forme linéaire sur E. Alors f est soit identiquement nulle, soit surjective.

Exemples 6.3

- Soit $E = \mathscr{C}([a,b], K)$ l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[a,b]$, à valeurs dans K. L'application φ qui, à un élément f de E, associe $\int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire sur E.
- Soit $E = \mathscr{A}(X, K)$ l'espace vectoriel de toutes les applications d'un ensemble X non vide vers K.
  Soit x_0 est un élément particulier de X.
  L'application φ qui, à un élément f de E, associe son image $f(x_0)$ en x_0 est une forme linéaire sur E.
- Si $E = \mathscr{M}_n(K)$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, l'application trace qui à tout M de E associe $\operatorname{tr}(M)$ est une forme linéaire sur E.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ un élément de K^n.
  L'application $f : K^n \to K$
  $$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$ est une forme linéaire sur K^n.

Propriété 6.4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$.

- Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de K^n.
  L'application f_a qui à $u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ associe $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ est une forme linéaire sur E.
  Notons qu'avec cette définition, nous avons $a_i = f(e_i)$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.
- Réciproquement, soit f une forme linéaire sur E.
  Alors il existe un vecteur a unique de K^n tel que $f = f_a$.

Démonstration

- Soient $u = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ et $v = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k$ deux vecteurs de E et soient λ et μ deux scalaires de K.
  $\lambda u + \mu v = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k)\, e_k$.
  $f_a(\lambda u + \mu v) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, (\lambda x_k + \mu y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \mu \sum_{k=1}^{n} a_k y_k = \lambda f_a(u) + \mu f_a(v)$.
- Cela provient directement du fait qu'une application linéaire est entiérement déterminée par les images des vecteurs d'une base.

Exemples 6.5

- Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications qui s'écrivent $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$, où (a, b, c) est un triplet quelconque de $\mathbb{R}^3$.
- Les formes linéaires sur $\mathbb{R}_3[X]$.

6.2 Hyperplans et formes linéaires

Propriété-Definition 6.6

Soit E un espace vectoriel sur K. Soit H un s.e.v. de E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un vecteur u dans $E \setminus H$ tel que $E = H \oplus K u$.
b) Pour tout vecteur u de $E \setminus H$, on a $E = H \oplus K u$.
c) Il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \mathrm{Ker} f$.

Si l'une de ces conditions est réalisée, on dit que H est un hyperplan de E.

Démonstration

On rappelle que $K u = \langle u \rangle$.

$b) \Rightarrow a)$ trivial.

$a) \Rightarrow c)$ On considère l'application f qui, à tout vecteur $x = x_1 + k u$ (décomposition unique) de E avec $x_1 \in H$ et $k \in K$, associe k.
f est bien une forme linéaire.
En effet, si $x = x_1 + k u$ et $y = y_1 + k' u$ alors $\lambda x + \mu y = \lambda x_1 + \mu y_1 + (\lambda k + \mu k')u$.
Et donc, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda k + \mu k' = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
f est non nulle puisque $f(u) = 1$.
$x = x_1 + ku \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \in H$.

$c) \Rightarrow b)$ Soit F un supplémentaire de H dans E.
Nous allons montrer que F ne contient que des vecteurs colinéaires entre eux. Ce qui signifiera que tous les supplémentaires de H sont de dimension 1.
Supposons que F contiennent deux vecteurs u et v non colinéaires (donc non nuls),
Soient $a = f(u)$ et $b = f(v)$.
On a $a \neq 0$ et $b \neq 0$ car $F \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$.
$u - \frac{a}{b} v \in F$ car F est un s.e.v. et $u - \frac{a}{b} v \neq 0$ car u et v ne sont pas colinéaires.
Or $f(u - \frac{a}{b} v) = a - \frac{a}{b} b = 0$ c'est-à-dire $u - \frac{a}{b} v \in \mathrm{Ker} f$.
Ce qui est contraire aux hypothèses sur F.
Pour tout vecteur u de $E \setminus H$, on a $\dim \langle u \rangle = 1$.
De plus, $\langle u \rangle \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$ car pour tout $k \in K$ non nul $f(ku) = k f(u) \neq 0$.
Donc $\langle u \rangle$ est un supplémentaire de H

Remarques 6.7

- L'énoncé précédent signifie que les hyperplans de E sont les s.e.v. de E qui sont supplémentaires d'une droite vectorielle, ou encore que ce sont les noyaux des formes linéaires non nulles sur E.
- Si $\dim E = n \geq 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces de E de dimension $n - 1$.
- Deux formes linéaires non nulles f et g sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même hyperplan noyau.
- Si H est un hyperplan de E et si f est une forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$, alors l'égalité $f(x) = 0$ (où x est un vecteur quelconque de E) est appelée équation de l'hyperplan H. Cette équation est unique à un facteur multiplicatif près.
- Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = (e_1, \dots , e_n)$.
  Soit H un hyperplan de E.
  L'équation de H s'écrit de manière unique (à un coefficient multiplicatif non nul près) :
  $a_1x_1 + a_2x_2 + \ \dots\ + a_nx_n = 0$, où $(x_1, x_2, \dots , x_n)$ sont les coordonnées dans (e) d'un vecteur x quelconque de E.

6.3 Bases duales

Propriété-Definition 6.8

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = (e_1, \dots , e_n)$.
Pour tout i de $\{1, \dots , n\}$, on note e_i^* la forme linéaire définie sur E par :

- $e_i^*(e_i) = 1$.
- $\forall j \in \{1, \dots , n\}$, avec $i \neq j$, $e_i^*(e_j) = 0$.

La famille $(e^*) = (e_1^*, \dots , e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de la base (e).

Démonstration

Il faut montrer que (e^*) est libre et génératrice.

- $\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$.
  $\Leftrightarrow\ \lambda_1 e_1^*(u) + \lambda_2 e_2^*(u) + \dots + \lambda_n e_n^*(u) = 0$ pour tout u de E.
  C'est vrai pour :
  $u = e_1$, on obtient $\lambda_1 e_1^*(e_1) + \lambda_2 e_2^*(e_1) + \dots + \lambda_n e_n^*(e_1) = 0$ c'est-à-dire $\lambda_1 = 0$.
  $u = e_2$, on obtient $\lambda_2 = 0$
  ...
  $u = e_n$, on obtient $\lambda_n = 0$
- Soit f une forme linéaire.
  On a $f = f(e_1)\, e_1^* + f(e_2)\, e_2^* + \ \dots\ + f(e_n)\, e_n^*$
  En effet, pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ \dots\ + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, on a :
  $(f(e_1)\, e_1^* + f(e_2)\, e_2^* + \ \dots\ + f(e_n)\, e_n^*)(x)$
  $= f(e_1)\, e_1^*(x) + f(e_2)\, e_2^*(x) + \ \dots\ + f(e_n)\, e_n^*(x)$
  $= f(e_1)\, e_1^*(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i) + f(e_2)\, e_2^*(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i) + \ \dots\ + f(e_n)\, e_n^*(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i)$
  $= f(e_1) \sum_{i=1}^{n} x_i\ e_1^*(e_i) + f(e_2) \sum_{i=1}^{n} x_i\ e_2^*(e_i) + \ \dots\ + f(e_n) \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_n^*(e_i)$
  $= f(e_1)\, x_1 + f(e_2)\, x_2 + \ \dots\ + f(e_n)\, x_n$
  $= f(x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \ \dots\ + x_ne_n)$
  $= f(x)$

Remarques 6.9

- On peut résumer la définition de e_i* avec la notation de Kroneker :
  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = 1$ si $i = j$
  $= 0$ si $i \neq j$
- Si dim $E = n$, la proposition précédente montre que dim $E^* = n$, ce qui découle en fait d'une propriété plus générale : Si E, F sont de dimensions finies, alors dim$\mathscr{L}(E, F) = (\dim E) \times (\dim F)$.
  En particulier dim $E^* = \dim\mathscr{L}(E, K) = (\dim E) \times (\dim K) = (\dim E) \times 1 = \dim E$.
- Pour tout indice i dans $\{1, \dots, n\}$, et pour tout vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, on a $e_i^*(x) = x_i$.
  e_i* est donc la forme linéaire qui envoie tout x de E sur sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans (e).
  C'est pourquoi on désigne parfois les formes linéaires $e_1^*, \dots, e_n^*$ de la base duale (e^*) comme les formes linéaires coordonnées dans la base (e).
- Les composantes d'une forme linéaire dans la base duale (e^*) sont les images par f des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ de la base (e) c'est-à-dire $f = \sum_{k=1}^{n} f(e_k)\, e_k^*$.
- Si (e) est une base de E et si (e^*) est sa base duale, alors la base (e) est déterminée de manière unique par la donnée de e^*. C'est pourquoi on dit que les bases (e) et (e^*) sont duales l'une de l'autre.

Exemples 6.10

- Soit a un élément de K. Les polynômes $A_k = (X - a)^k$, avec $0 \leq k \leq n$, forment une base de $K_n[X]$.
  La base duale est formée des applications $A_k^* : P \mapsto \frac{1}{k!}P^{(k)}(a)$.
  L'égalité $P = \sum_{k=0}^{n} A_k^*(P)A_k$ n'est autre que la formule de Taylor :
  $P = P(a) + P'(a)(X - a) + \frac{1}{2!}P''(a)(X - a)^2 + \ \dots\ + \frac{1}{n!}P^{(n)}(a)(X - a)^n$.
- Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ une famille de $n + 1$ points distincts de K.
  Pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, notons $L_k = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$.
  La famille $(L) = L_0, L_1, \dots, L_n$ est une base de $K_n[X]$ dont la base duale est constituée des formes linéaires $L_k^* : P \mapsto P(a_k)$.
  L'égalité $P(X) = \sum_{k=0}^{n} L_k^*(P)L_k(X) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$ est appelée formule d'interpolation de Lagrange pour les points $a_0, a_1, \dots, a_n$.
  Plus généralement, et pour tout $(n + 1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui prend les valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ aux points $a_0, a_1, \dots, a_n$.

6.4 Equations d'un sous-espace en dimension finie

Propriété 6.11

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit F un s.e.v. de E, de dimension p, avec $0 \leq p < n$.
Il existe une famille de $n - p$ formes linéaires indépendantes $f_1, \dots, f_{n-p}$ telles que :

$$x \in F \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \ \dots\ = f_{n-p}(x) = 0.$$

Réciproquement, un tel système de $n - p$ équations indépendantes définit un sous-espace de dimension p de E.

Remarques 6.12

- Le système (S) : $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, ... , $f_{n-p}(x) = 0$ est appelé un système d'équations du sous-espace F.
- On suppose que E est rapporté à une base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
  Si on exprime les formes linéaires f_i dans la base duale (e^*) c'est-à-dire en fonction des formes linéaires coordonnées dans (e), alors (S) prend la forme d'un système linéaire homogène de $n - p$ équations aux n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (les coordonnées dans (e) d'un vecteur x quelconque de E.)
- Si on note $H_1, H_2, \ldots, H_{n-p}$ les hyperplans noyaux des formes linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_{n-p}$, le résultat précédent s'écrit $F = \bigcap_{k=1}^{n-p} H_k$.
  Autrement dit, tout sous-espace de dimension p dans un espace vectoriel de dimension n peut être considéré comme l'intersection de $n - p$ hyperplans indépendants.