



Correction

Exercice 1

Pour calculer x , il faut $\sin t \neq 0$ c'est-à-dire $t \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Donc $D_x = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi; (k+1)\pi[$.

On a $D_y = \mathbb{R}$.

Donc $D_\Gamma = D_x \cap D_y = D_x = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi; (k+1)\pi[$.

$$\forall t \in D_\Gamma, \text{ on a } \begin{aligned} x(t+\pi) &= (\cos(t+\pi))^2 + \ln|\sin(t+\pi)| = (-\cos t)^2 + \ln|-\sin t| = \cos^2 t + \ln|\sin t| = x(t) \\ y(t+\pi) &= \sin(t+\pi) \cos(t+\pi) = (-\sin t)(-\cos t) = \sin t \cos t = y(t) \end{aligned}$$

La courbe est donc périodique de période π .

On peut donc l'étudier par exemple sur $D_1 = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

L'ensemble D_1 est symétrique par rapport à 0 et, $\forall t \in D_1, x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$.

La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

L'ensemble d'étude est donc $E = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

x est dérivable sur E et, $\forall t \in E, x'(t) = -2 \sin t \cos t + \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{-2 \sin^2 t \cos t + \cos t}{\sin t} = \frac{\cos t(1 - 2 \sin^2 t)}{\sin t}$.

$\forall t \in E, x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - 2 \sin^2 t \geq 0 \text{ ou } \cos t = 0) \Leftrightarrow (\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } t = \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow (t \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{\pi}{2})$.

y est dérivable sur E et, $\forall t \in E, y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$

$\forall t \in E, y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2t \geq 0 \Leftrightarrow 2t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t \leq \frac{\pi}{4}$.

On a donc le tableau de variations suivant :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
x'	+	0	-
y'	+	0	-
x	↗		↘
y	↗		↘

On a $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe.

On a besoin d'une étude locale pour $t = \frac{\pi}{4}$ car c'est un point singulier.

$$\forall t \in E, x''(t) = -2 \cos 2t - \frac{1}{\sin^2 t} \quad \text{et} \quad x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$\forall t \in E, y''(t) = -2 \sin 2t \quad \text{et} \quad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$$

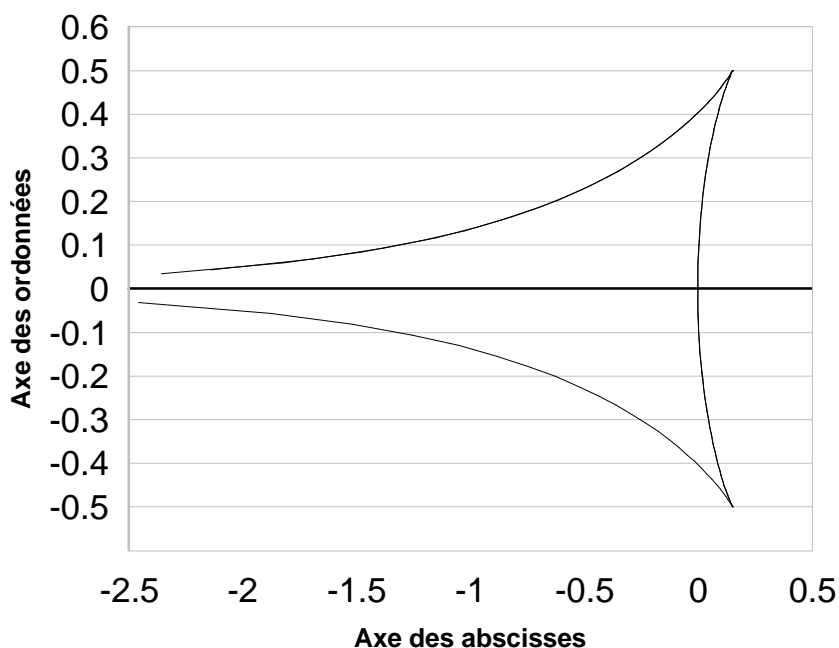
$$\forall t \in E, x^{(3)}(t) = 4 \sin 2t + 2 \cos t \frac{1}{\sin^3 t} \quad \text{et} \quad x^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8$$

$$\forall t \in E, y^{(3)}(t) = -4 \cos 2t \quad \text{et} \quad y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Le premier vecteur dérivé non nul est d'ordre 2 (pair) et le premier vecteur qui ne lui est pas colinéaire est d'ordre 3 (impair). Donc le point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est un point de rebroussement de premier espèce.

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x'	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,85$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,3$	0
y'	0,5	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,85$	-1
x	$\frac{3}{4} - \ln 2 \approx 0,05$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,15$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2 \approx 0,1$	0
y	$\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,45$	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,45$	0

On obtient la courbe :



Exercice 2

$$D_{\Gamma} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

D_{Γ} est symétrique par rapport à 0.

$$\forall \theta \in D_{\Gamma}, \rho(-\theta) = -\rho(\theta)$$

C'est-à-dire ρ est une fonction impaire.

Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On réduit donc l'ensemble d'étude à $E = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

$$\rho \text{ est dérivable sur } E \text{ et, } \forall \theta \in E, \rho'(\theta) = \frac{\theta^2 - 1 - \theta(2\theta)}{(\theta^2 - 1)^2} = \frac{-\theta^2 - 1}{(\theta^2 - 1)^2} < 0.$$

Toutes les tangentes sont bien définies car le pôle n'est obtenue que pour $\theta = 0$ et $\rho'(0) = -1 \neq 0$

On obtient le tableau de variations suivant :

θ	0	1	$+\infty$
ρ'		-	
ρ			

$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho(\theta) = 0$ donc on a une spirale qui "s'entoure" autour du centre du repère O .

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \rho(\theta) \sin(\theta - 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h + 1) \sin(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h) \sin h}{h(h + 2)}.$$

On a $\sin h \sim_0 h$. Donc $\frac{(1 + h) \sin h}{h(h + 2)} \sim_0 \frac{1 + h}{2 + h}$.

D'où $\lim_{\theta \rightarrow 1} \rho(\theta) \sin(\theta - 1) = \frac{1}{2}$.

Donc la droite passant par $H\left(1 + \frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et d'angle polaire 1 ($\simeq \frac{\pi}{3}$) est asymptote à la courbe.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
ρ'	-1	-2,4	-11	-224	-1,6	-0,13	0,02
ρ	0	-0,7	-2	10	1	0,35	0,16

Le tableau de valeurs approchées précédent nous permet de construire la courbe :

