Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 1 : Courbes et équations différentielles

Examen 1ère Session **2ème semestre** **2003/2004**
07 juin 2004 **13h30 - 15h30**

Correction

Exercice 1

C'est une équation (non linéaire) homogène.

On pose $y = tx$ et on obtient $y' = t'x + t$.
D'où $3x\,tx\,(t'x + t) = x^2 + 4(tx)^2$
$\Leftrightarrow 3x^3 tt' + 3x^2 t^2 = x^2 + 4x^2 t^2$
$\Leftrightarrow 3xtt' = 1 + t^2$
$\Leftrightarrow \dfrac{3tt'}{1+t^2} = \dfrac{1}{x}$
$\Leftrightarrow \left[\dfrac{3}{2}\ln(1+t^2)\right]' = [\ln x]'$
$\Leftrightarrow \ln(1+t^2) = \dfrac{2}{3}\ln x + c$ où $c \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow 1 + t^2 = e^{\ln \sqrt[3]{x^2} + c}$ où $c \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow t^2 = k\sqrt[3]{x^2} - 1$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$
$\Leftrightarrow t = \pm\sqrt{k\sqrt[3]{x^2} - 1}$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Enfin $y = \pm x\sqrt{k\sqrt[3]{x^2} - 1}$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

C'est une équation de Bernouilli.

Remarque : $y = 0$ est solution.

On pose $u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$.
Donc $y = u^2$ et $y' = 2u'u$.

L'équation devient : $2u'u = u^2 + xu$.

Si $u = 0$, on retrouve $y = 0$.
Si $u \neq 0$, sur tout intervalle où u ne s'annule pas, on a alors $2u' = u + x$ c'est-à-dire $u' - \dfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{2}x$.

C'est une équation linéaire en u qui se résout en trois étapes.

#	*Equation sans second membre.*

Une primitive de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}x$.
Les solutions de l'équation sans second membre sont donc $u = \lambda e^{\frac{1}{2}x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

#	*Solution particulière.*

On cherche une solution particulière de la forme $u_0 = ax + b$.
On a $u_0' = a$ et $-\frac{1}{2}ax + a - \frac{b}{2} = u' - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}x$.
Donc $\begin{cases} a = -1 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$.
D'où $u_0 = -x - 2$.

#	*Equation avec second membre.*

Les solutions de l'équation avec second membre sont donc $u = \lambda e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où $y = u^2 = (\lambda e^{\frac{1}{2}x} - x - 2)^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On a $y = xy' - \sqrt{y' + 4}$.

C'est une équation de Clairaut.

On pose $y' = t$.
On obtient $y = xt - \sqrt{t + 4}$.
Donc $y' = t + xt' - \frac{t'}{2\sqrt{t+4}}$.
Puisque $t = y'$, on a $xt' - \frac{t'}{2\sqrt{t+4}} = 0$.
D'où $t'\left(x - \frac{1}{2\sqrt{t+4}}\right) = 0$.

Si $t' = 0$, alors $t = c \in \mathbb{R}$ et $y = cx - \sqrt{c + 4}$.

Si $t' \neq 0$, alors, sur tout intervalle où t ne s'annule pas, on a $x - \frac{1}{2\sqrt{t+4}} = 0$ c'est-à-dire $t = \frac{1}{4x^2} - 4$.
D'où $y = xt - \sqrt{t+4} = \frac{1}{4x} - 4x - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{4x} - 4x$.

Exercice 4

C'est une équation de Ricatti.

#	$y_1 = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de cette équation.

#	On pose $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{t}$ avec t ne s'annulant pas sur l'intervalle de résolution.
On a $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{t'}{t^2}$.

$$y' + y^2 = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ sur }]0;+\infty[.$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x^2} - \frac{t'}{t^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{t}}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{t'}{t^2} + \frac{2}{xt} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{xt}$$

$$\Leftrightarrow \quad -t' + \frac{1}{x}t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t' - \frac{1}{x}t = 1$$

C'est une équation linéaire du premier ordre en t que l'on résout en 3 étapes.

\# *Equation sans second membre*.

Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$.
Les solutions de l'équation sans second membre sont donc $t = kx$ où $k \in \mathbb{R}$.

\# *Solution particulière*.

On cherche une solution particulière de la forme $t_0 = k(x)\,x$ où k est une fonction de x.
On a $t_0' = k'(x)\,x + k(x)$.
Donc $t_0' - \frac{1}{x}t_0 = 1 \Leftrightarrow k'(x)x + k(x) - k(x) = 1 \Leftrightarrow k'(x) = \frac{1}{x}$.
D'où $k(x) = \ln x$ et $t_0 = x\ln x$.

\# *Equation avec second membre*.

Les solutions de l'équation avec second membre sont donc $t = kx + x\ln x$ où $k \in \mathbb{R}$.

Enfin $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{t} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(k + \ln x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{k + \ln x}\right)$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

C'est une équation d'Euler.

On pose $x = e^t$ c'est-à-dire $t = \ln x$.

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} \times \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{x} \times \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} \times \frac{\partial y}{\partial t}\right) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x} \times \frac{\partial t}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

D'où $y'' = -\frac{1}{x^2} \times \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

On a donc $x^2\left(-\frac{1}{x^2} \times \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) - 4x\left(\frac{1}{x} \times \frac{\partial y}{\partial t}\right) + 3y = 0$

D'où $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 5\frac{\partial y}{\partial t} + 4y = 0$.

$\Delta = 25 - 4 \times 4 = 9 > 0$ $\qquad r_1 = \frac{5 - 3}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{5 + 3}{2} = 4$

Donc la solution générale est $y = \lambda e^t + \mu e^{4t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On obtient enfin : $y = \lambda x + \mu x^4$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.