Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 1 : Courbes et équations différentielles

Examen 2ème Session **2ème semestre** **2003/2004**
Septembre 2004 **2h 00**

Instructions aux étudiants :

1. **Seuls documents autorisés : formulaire sur les DL, formulaire sur les primitives et formulaire sur la métrique des courbes.**
2. **L'usage des calculatrices est interdit.**

Exercice 1

Pour l'ensemble de définition, il faut $\sin t > 0$ c'est-à-dire $t \in]0+2k\pi;\pi+2k\pi[=]2k\pi;(2k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à l'origine donc il n'y a pas de parité.
L'ensemble de définition est stable par un translation de 2π et

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = \cos^2(t+2\pi) + \ln(\sin(t+2\pi)) = x(t) \\ y(t) = \sin(t+2\pi)\cos(t+2\pi) = y(t) \end{cases}.$$

Donc l'étude se fait sur $E =]0;\pi[$.

Les fonctions x et y sont dérivables sur E et, $\forall t \in E$,
$x'(t) = -2\sin t \cos t + \dfrac{\cos t}{\sin t} = -\sin 2t + \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{\cos t}{\sin t}(-2\sin^2 t + 1)$
$y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
$\cos t$	1	+		+	0	–		–	–1
$1-2\sin^2 t$	1	+	0	–		–	0	+	1
$x'(t)$	1	+	0	–	0	+	0	–	–1

$x'(t) \ge 0 \iff 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{4}$.
$y'(t) \ge 0 \iff 0 \le 2t \le \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2} \le 2t \le 2\pi \iff 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4} \le t \le \pi$.

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
$x'(t)$	1	+	0	–	0	+	0	–	–1
$y'(t)$	1	+	0	–	–1	–	0	+	1
$x(t)$	$-\infty$	↗	a	↘	0	↗	a	↘	$-\infty$
$y(t)$	0	↗	1/2	↘	0	↘	–1/2	↗	0

où $a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe.

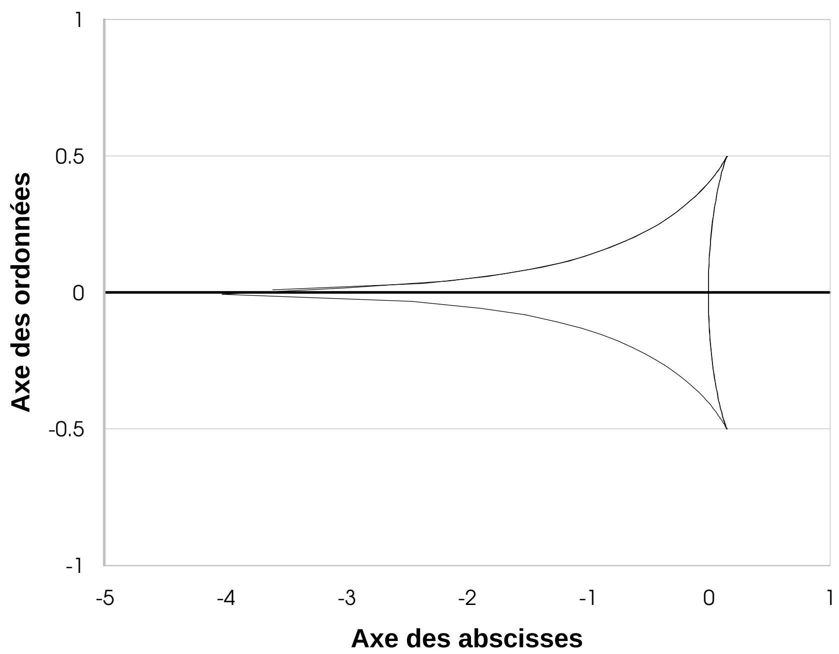
Les points de la courbe correspondant à $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $t_2 = \dfrac{3\pi}{4}$ sont des points singuliers.

$$x''(t) = -2\cos 2t - \frac{1}{\sin^2 t} \qquad x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \qquad x''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$$
$$y''(t) = -2\sin 2t \qquad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \qquad y''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$$

$$x^{(3)}(t) = 4\sin 2t + 2\cos t(\sin t)^{-3} \qquad x^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \qquad x^{(3)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -8$$
$$y^{(3)}(t) = -4\cos 2t \qquad y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad y^{(3)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

Ce sont des points de rebroussement de première espèce.

On a la représentation :



Exercice 2

C'est une équation non linéaire homogène.

On pose $y = tx$ donc $y' = t'x + t$
On obtient $x^2(t'x + t) = x^2 + t^2x^2 - tx^2$ c'est-à-dire $t'x + t = 1 + t^2 - t$ ou encore $t'x = (1 - t)^2$.

Si $t = 1$, alors $y = x$.
Si $t \neq 1$, alors $\dfrac{t'}{(1-t)^2} = \dfrac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-t}\right)' = (\ln|x|)'$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-t} = \ln x + c \qquad \text{où } c \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-t} = \ln kx \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*$$
$$\Leftrightarrow t = 1 - \frac{1}{\ln kx} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

Donc $y = x - \dfrac{x}{\ln kx}$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

C'est une équation de Bernouilli.

Remarque : $y = 0$ est une solution particulière.

On a $\alpha = 2$ et on pose $u = y^{1-\alpha} = y^{-1} = \frac{1}{y}$.
Donc $y = \frac{1}{u}$ et $u' = -\frac{y'}{y^2}$.
Sur tout intervalle où y ne s'annule pas, l'équation devient : $x^2\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} + 1 = 0$
C'est-à-dire $-x^2u' + u + 1 = 0$: c'est une équation linéaire premier ordre en u.

Equation sans second membre : $u' - \frac{1}{x^2}u = 0$

Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$.
La solution générale est donc $u = ke^{-\frac{1}{x}}$ où $k\in\mathbb{R}$.

Solution particulière

$u = -1$.

Equation avec second membre

$u = ke^{-\frac{1}{x}} - 1$ où $k\in\mathbb{R}$.

D'où $y = \dfrac{1}{ke^{-\frac{1}{x}} - 1}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Exercice 4

$D_\rho = \mathbb{R}$.
ρ est π-périodique ce qui signifie que les points $M(\theta + \pi)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à O. Donc la courbe est 2π-périodique ce qui donne une première réduction de l'intervalle d'étude à $E_1 = [-\pi;\pi]$.
E_1 est symétrique par rapport à 0 et $\forall\theta\in E_1$, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc les points $M(-\theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à Ox. Réduction à $E_2 = [0;\pi]$.
E_2 est symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et $\forall\theta\in E_2$, $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$ donc les points $M(\pi - \theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à Oy. Réduction à $E_3 = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
Il n'obtient plus rien d'intéressant pour $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)$. Donc l'ensemble d'étude est $E = E_3 = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
ρ est dérivable sur E et, $\forall\theta\in E$,

$$\rho'(\theta) = \frac{-2\sin 2\theta(2-\sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta}{(2-\sin^2\theta)^2}$$
$$= \frac{2\sin 2\theta(-2+\sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta)}{(2-\sin^2\theta)^2}$$
$$= \frac{2\sin 2\theta(-2+\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)}{(2-\sin^2\theta)^2}$$
$$= \frac{2\sin 2\theta(\cos^2\theta - 2)}{(2-\sin^2\theta)^2}$$

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\rho'(\theta) \le 0$ et $\rho'(\theta) = 0 \iff \sin 2\theta = 0 \iff \theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$.
$\rho(\theta) = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff 2\theta = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{4}$ (sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$).

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	$-4/3$	0
$\rho(\theta)$	1/2	0	-1