



# Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

## Mathématiques

Mias 1 : Unité fondamentale

Examen 1ère Session  
12 Janvier 2004

1er semestre

2003/2004  
8h45-11h45

### Instructions aux étudiants :

1. Tous documents interdits excepté le formulaire sur les D.L et le formulaire sur les dérivées.
2. L'usage des calculatrices est interdit.
3. Utiliser des copies différentes pour les exercices d'analyse et ceux d'algèbre.

## 1. Analyse

### Exercice 1.1

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation  $\sin x = \frac{x}{x+1}$  admet une infinité de solutions sur  $]0; +\infty[$ .

### Exercice 1.2

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$

### Exercice 1.3

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ .

1. Etudier la dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'$ .
2. En déduire une autre écriture de  $f$ .

### Exercice 1.4

En utilisant une intégration par parties, déterminer  $I = \int (e^{3t} \sin t) dt$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 1.5

En utilisant le changement de variable  $u = \sqrt{e^t}$ , calculer  $\int \frac{e^t}{1 + \sqrt{e^t}} dt$  sur  $\mathbb{R}$ .

Rappel :  $u = u + 1 - 1$ .

## 2. Algèbre

### Exercice 2.1

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites numériques réelles.

Soit  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des suites numériques réelles qui convergent vers 0 i.e.  $\mathcal{S}_0 = \{u \in \mathcal{S} / \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$ .

Montrer que, muni des lois usuelles,  $\mathcal{S}_0$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v.

### Exercice 2.2

Soit  $m$  un réel et soient  $u_1 = (1;2;-1)$ ,  $u_2 = (2;3;3)$  et  $u_3 = (m;15;-3)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$ , les vecteurs  $(u_1, u_2, u_3)$  ne forment-ils pas une base de  $\mathbb{R}^3$ ?

### Exercice 2.3

Soit  $E$  l'espace vectoriel réel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit la famille  $(f_1, f_2, f_3)$  de  $E$  où  $f_i$  est l'application définie par  $f_i(x) = |x - i| \forall x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $i = 1, 2, 3$ .

Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3)$  est une famille libre.

### Exercice 2.4

Soient  $u_1 = (2;-1;1)$ ,  $u_2 = (3;2;0)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Soient  $F = \langle u_1, u_2 \rangle$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y \text{ et } z = 0\}$ .

1. Déterminer  $\dim F$ ,  $\dim G$  et  $F \cap G$ .
2. En déduire que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .

### Exercice 2.5

Soit  $E$  un  $K$ -e.v.

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois s.e.v. de  $E$  tels que  $E = A \oplus B$  et  $A \subset C$ .

Montrer que  $C = A \oplus (B \cap C)$ .