



Correction

1. Analyse

Exercice 1.1

La fonction sin est continue sur \mathbb{R} donc, à fortiori, sur tout intervalle de la forme $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ où k est un entier strictement positif.

Il en est de même de la fonction $f(x) = \sin x - \frac{x}{x+1}$.

On a, de plus, $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$.

Or si $x > 1$, $\frac{1}{2} < \frac{x}{x+1} < 1$ car la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ est strictement croissante et tend vers 1.

Donc $f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) < -1$ et $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) > 0$.

Donc f s'annule au moins une fois sur tout intervalle $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$.

Exercice 1.2

Posons $x = \frac{\pi}{2} + h$.

On a $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) \right)^{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2} + h)}} = \lim_{h \rightarrow 0} (\cos h)^{\frac{1}{\sin^2 h}} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin^2 h} \ln(\cos h)}$

Or $\cos h \sim_0 1 - \frac{h^2}{2}$.

Puisque $\ln(1 + X) \sim_0 X$, on a $\ln(\cos h) \sim_0 -\frac{h^2}{2}$.

Puisque $\sin x \sim_0 x$, on a $\frac{1}{\sin^2 h} \sim_0 \frac{1}{h^2}$.

D'où $\frac{1}{\sin^2 h} \ln(\cos h) \sim_0 -\frac{1}{2}$ et donc $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 1.3

I°) La fonction arcsin est définie sur $[-1;1]$, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $] -1;1[$.
 f est dérivable sur tout intervalle où $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$ c'est-à-dire $-1 - x^2 < 2x < 1 + x^2$.

La première inéquation nous donne $x^2 + 2x + 1 > 0$ c'est-à-dire $x \neq -1$.

La deuxième inéquation nous donne $x^2 - 2x + 1 > 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$.

f est donc dérivable sur $] -\infty, -1[$, sur $] -1;1[$ et sur $]1; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\text{On a alors } f'(x) &= \frac{2 \times (1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&= 2 \times \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \\
&= 2 \times \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \\
&= 2 \times \frac{1-x^2}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = 2 \times \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

2°) On a donc $f'(x) = 2(\arctan x)'$ et donc $f(x) = 2 \arctan x$ sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
De plus, $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 \arctan 1$. De même, $f(-1) = 2 \arctan -1$.
D'où $f(x) = 2 \arctan x$ sur \mathbb{R} .

Exercice 1.4

$$\begin{aligned}
u &= e^{3t} & v' &= \sin t \\
u' &= 3e^{3t} & v &= -\cos t
\end{aligned}$$

$$I = -e^{3t} \cos t + 3 \int (e^{3t} \cos t) dt.$$

$$\begin{aligned}
u &= e^{3t} & v' &= \cos t \\
u' &= 3e^{3t} & v &= \sin t
\end{aligned}$$

$$I = -e^{3t} \cos t + 3[e^{3t} \sin t - 3 \int (e^{3t} \sin t) dt] = e^{3t} \cos t + 3e^{3t} \sin t - 9 \int (e^{3t} \sin t) dt$$

$$I = -e^{3t} \cos t + 3e^{3t} \sin t - 9I$$

$$10I = e^{3t}(3 \sin t - \cos t)$$

$$\text{Donc } I = \frac{e^{3t}}{10}(3 \sin t - \cos t).$$

Exercice 1.5

Si $u = \sqrt{e^t}$ alors $t = \ln u^2 = 2 \ln u$ et $dt = \frac{2}{u} du$.

$$\int \frac{e^t}{1 + \sqrt{e^t}} dt = \int \frac{u^2}{1+u} \times \frac{2}{u} du = 2 \int \frac{u}{1+u} du = 2 \int 1 - \frac{1}{1+u} du = 2(u - \ln|1+u|) = 2\sqrt{e^t} - 2 \ln(1 + \sqrt{e^t}).$$

2. Algèbre

Exercice 2.1

Muni des lois usuelles, \mathcal{S} est un \mathbb{R} -e.v. On a $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ et \mathcal{S}_0 est muni des mêmes lois que \mathcal{S} .
Donc, pour montrer que \mathcal{S}_0 est un \mathbb{R} -e.v., il suffit de montrer que \mathcal{S}_0 est un s.e.v. de \mathcal{S} .

La suite nulle 0 appartient à \mathcal{S}_0 (en effet, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0_n = 0$ puisque $0_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$).
Donc $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$.

Soient u et v deux suites de \mathcal{S}_0 et soient λ et μ deux réels.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u + \mu v)_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

Donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{S}_0$.

Exercice 2.2

Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et puisque la famille (u_1, u_2, u_3) contient 3 vecteurs, cette famille sera une base si et seulement si c'est une famille libre.

On cherche donc ici les valeurs de m pour lesquelles la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

Méthode 1 : On résout le système en λ_1, λ_2 et λ_3 induit par l'équation $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$.
La famille sera liée (u_1, u_2, u_3) si ce système admet des solutions non nulles

Méthode 2 : On calcule le déterminant de la famille (u_1, u_2, u_3) .
La famille sera liée $\det(u_1, u_2, u_3) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(u_1, u_2, u_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 15 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 15 - 2m \\ 0 & 5 & m - 3 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 5 - 2m \\ 0 & 0 & -9m + 72 \end{vmatrix} = 9m - 72 \end{aligned}$$

Donc $\det(u_1, u_2, u_3) = 0 \Leftrightarrow 9m - 72 = 0 \Leftrightarrow m = 8$.

Exercice 2.3

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0.$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0.$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 |x - 1| + \lambda_2 |x - 2| + \lambda_3 |x - 3| = 0.$$

$$\text{Vrai pour } x = 1 \Rightarrow \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

$$\text{Vrai pour } x = 2 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0.$$

$$\text{Vrai pour } x = 3 \Rightarrow 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \lambda_1 & + \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \lambda_1 & + \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2.4

I°) # La famille (u_1, u_2) est libre donc $\dim F = 2$.

$G = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, 1, 0) \text{ où } x \in \mathbb{R}\}$.

Soit $u_3 = (1; 1; 0)$, on a $G = \langle u_3 \rangle$.

$u_3 \neq 0$ donc $\dim G = 1$.

Soit $v \in F \cap G$.

$$v \in F \Leftrightarrow v = a u_1 + b u_2 \text{ où } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

$$\Leftrightarrow v = a(2; -1; 1) + b(3; 2; 0) = (2a + 3b, -a + 2b, a)$$

$$v \in G \Leftrightarrow v = (c, c, 0) \text{ où } c \text{ réel.}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 2a + 3b = c \\ -a + 2b = c \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = c \\ 2b = c \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

D'où $F \cap G = \{0\}$.

$$2^\circ) \quad \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = 3$$

$F + G$ est donc un s.e.v. de \mathbb{R}^3 de dimension 3 c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = F + G$.

Puisque $F \cap G = \{0\}$, la somme est directe.

Exercice 2.5

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && \text{associativité de la loi} \\ &= \{0\} \cap C && \text{car la somme } A + B \text{ est directe.} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Donc la somme $A + (B \cap C)$ est directe.

Il reste à montrer que tout élément de C peut s'écrire comme la somme d'un élément de A et d'un élément de $B \cap C$.

Soit $x \in C$.

Puisque C est une partie de E , x peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$.

Il reste à vérifier que $x_2 \in C$ car alors $x_2 \in B \cap C$ et on a bien le résultat voulu.

On a $x_2 = x - x_1$. Or $x \in C$ et $x_1 \in A \subset C$. Donc $x - x_1 \in C$ car C s.e.v.