Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 1 : Unité fondamentale

Examen partiel	**1er semestre**	**2003/2004**
17 novembre 2003		**3 h 00**

Instructions aux étudiants :

1. **Tous documents interdits**
2. **L'usage des calculatrices est interdit.**

---

1. Analyse

Exercice 1.1

Soient a et b deux réels donnés.
Montrer que si l'on a $a < b + \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, alors $a \leq b$.

Exercice 1.2

Soient $z_1 = 2\sqrt{6}\,(1+i)$ et $z_2 = \sqrt{2}\,(1+i\sqrt{3}\,)$.

1. Déterminer les formes trigonométriques de z_1 et z_2.
2. Déterminer la forme algébrique de $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
3. Déterminer le module et l'argument de z.
4. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et celle de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 1.3

Soit v la suite réelle définie par $v_n = \dfrac{1+n+n^2}{1+n^2}$ pour tout entier n.
Montrer, en utilisant la définition des limites et <u>uniquement de cette façon</u>, que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ (on pourra remarquer que, pour tout entier non nul n, on a $\dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{1}{n}$).

Exercice 1.4

On considère les suites u et v définies par :

- $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 4}$ pour tout entier n
- $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$ pour tout entier n.

1. Pour tout entier n, déterminer une relation entre v_{n+1} et v_n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2. Pour tout entier n, déterminer u_n en fonction de v_n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 1.5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$.
Montrer, en utilisant la définition des limites et <u>uniquement de cette façon</u>, que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

2. Algèbre

Exercice 2.1

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner la négation de l'expression suivante :

   (1) $\forall f\in\mathscr{F},\ \forall\varepsilon>0, \exists\,\alpha>0\ /\ \forall x,y\in\mathbb{R},\quad |x-y|<\alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$
2. L'expression (1) est-elle vraie ou fausse? Justifiez votre réponse.

Exercice 2.2

Soient E un ensemble et A, B des parties de E.
Pout toute partie F de E, on designe $C_E F$ par $\overline{F}$.

Simplifier l'expression : $\overline{\overline{\overline{\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)}\cap\left(\overline{A}\cap B\right)}\cup(A\cap B)}\cap(A\cap B)}$.

Exercice 2.3

Dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, on considère l'équation $A\cap X = B$ d'inconnue X.

1. Indiquer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que cette équation admette des solutions.
2. Résoudre alors cette équation.

Exercice 2.4

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par

$f(n) = 2n$ et $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair

$\qquad\qquad\qquad = n$ si n est impair.

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
2. Préciser $f\circ g$ et $g\circ f$.

Exercice 2.5

On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $\forall x,y\in\mathbb{Z},\ \ x\mathscr{R}y \iff x^2 + x = y^2 + y$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Expliciter cl(0), cl(1) et, de façon générale, cl(x) où $x\in\mathbb{Z}$.