Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 1 : Unité fondamentale

Examen partiel **1er semestre** **2003/2004**

Correction

---

1. Analyse

Exercice 1.1

On doit montrer : $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \le b$.

Nous allons prouver que la contraposée est vraie c'est-à-dire : $a > b \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 \,/\, a \ge b + \varepsilon)$.

Supposons donc que $a > b$.

On pose $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$.

On a $b + \varepsilon = b + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{2b+a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

Or $a > b$ donc $2a > a + b$ et $a > \dfrac{a+b}{2}$ c'est-à-dire $a > b + \varepsilon$.

Exercice 1.2

1. $|z_1| = 2\sqrt{6} \times |1+i| = 2\sqrt{6}\,\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$.

   D'où $z_1 = 4\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   $|z_2| = \sqrt{2} \times \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2}\,\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$.

   D'où $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. $z = \dfrac{2\sqrt{6}\,(1+i)}{\sqrt{2}\,(1+i\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\,\dfrac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\,\dfrac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{4} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-3}{2}i$.

3. $|z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.

   $\arg z \equiv \arg z_1 - \arg z_2\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \equiv -\dfrac{\pi}{12}[2\pi]$.

4. On a $z = \sqrt{6}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6}\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sqrt{6}\sin\dfrac{\pi}{12}$.

   Donc $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 1.3

Pour tout entier n non nul, $n^2 + 1 > n^2 > 0$ donc $\dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{n}{n^2}$ c'est-à-dire $\dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{1}{n}$.

On a $|v_n - 1| = \left|\dfrac{1+n+n^2}{1+n^2} - 1\right| = \left|\dfrac{n}{1+n^2}\right| < \dfrac{1}{n}$.

Donc, $\forall\varepsilon>0$, on pose $n_0 = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

On a : $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow\; \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow\; \left|\dfrac{n}{1+n^2}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow\; |v_n - 1| < \varepsilon$.

Exercice 1.4

1. $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-3} = \dfrac{\dfrac{u_n-6}{u_n-4}-2}{\dfrac{u_n-6}{u_n-4}-3} = \dfrac{\dfrac{u_n-6-2u_n+8}{u_n-4}}{\dfrac{u_n-6-3u_n+12}{u_n-4}} = \dfrac{-u_n+2}{-2u_n+6} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u_n-2}{u_n-3} = \dfrac{1}{2}v_n$.

   La suite v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ (avec $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$).

   Donc, elle converge vers 0.

2. $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n-3} \;\Rightarrow\; u_nv_n - 3v_n = u_n - 2 \;\Rightarrow\; u_nv_n - u_n = 3v_n - 2 \;\Rightarrow\; (v_n-1)u_n = 3v_n - 2$.

   Donc $u_n = \dfrac{3v_n-2}{v_n-1}$.

   D'après les règles de limites, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{-2}{-1} = 2$

Exercice 1.5

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(2+h) = 4$.

On a $f(2+h) = (2+h)^3 - (2+h)^2 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3 - (4+4h+h^2) = 4 + 8h + 5h^2 + h^3$.

D'où $|f(2+h) - 4| = |8h + 5h^2 + h^3| = |h||8 + 5h + h^2|$.

Si $|h| < 1$, $|8 + 5h + h^2| \leq |8| + 5|h| + |h|^2 < 14$.

Donc $\forall\varepsilon>0$, on pose $\eta = \inf\left(1, \dfrac{\varepsilon}{14}\right)$.

On a : $|h| < \eta \;\Rightarrow\; |h| < 1$ et $|h| < \dfrac{\varepsilon}{14}$

$\Rightarrow\; |8+5h+h^2| < 14$ et $|h| < \dfrac{\varepsilon}{14}$

$\Rightarrow\; |h||8+5h+h^2| < \varepsilon$.

$\Rightarrow\; |f(2+h) - 4| < \varepsilon$.

2. Algèbre

Exercice 2.1

1. $\exists f\in\mathscr{F}$ et $\exists\varepsilon>0$ / $\forall\alpha>0$, $\exists x,y\in\mathbb{R}$ / $|x-y| < \alpha$ et $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.
2. L'expression (1) est fausse : sa négation est vraie.

   Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ si $x > 0$.

   $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ si $x < 0$.

   On pose $\varepsilon = 1$.

   $\forall\alpha>0$, on prend $x = \dfrac{\alpha}{3}$ et $y = -\dfrac{\alpha}{3}$.

   On a bien $|x-y| = \left|\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\alpha}{3}\right| = \left|\dfrac{2\alpha}{3}\right| = \dfrac{2\alpha}{3} < \alpha$

   Et $|f(x) - f(y)| = \left|\dfrac{1}{\frac{\alpha}{3}} + 1 - \dfrac{1}{-\frac{\alpha}{3}} + 1\right| = \left|\dfrac{3}{\alpha} + 1 + \dfrac{3}{\alpha} + 1\right| = \left|2 + \dfrac{6}{\alpha}\right| = 2 + \dfrac{6}{\alpha} \geq 2 \geq 1 (= \varepsilon)$.

Exercice 2.2

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)}\cap\left(\overline{A}\cap B\right)}\cup(A\cap B)}\cap(A\cap B)} = \left[\overline{\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)}\cap\left(\overline{A}\cap B\right)}\cup(A\cap B)\right]\cup\overline{(A\cap B)}$$

$$= \left[\overline{\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)}\cap\left(\overline{A}\cap B\right)}\right]\cup\left[(A\cap B)\cup\overline{(A\cap B)}\right]$$

$$= \left[\overline{\overline{\left(A\cap\overline{B}\right)}\cap\left(\overline{A}\cap B\right)}\right]\cup E = E$$

Exercice 2.3

1. Puisque, pour tout ensemble X, $A\cap X\subset A$, il faut que $B\subset A$.
   Dans le cas où $B\subset A$, on obtient que B est une solution de l'équation. En effet : $A\cap B=B$.
2. $X = X\cap E = X\cap(A\cup C_E A) = (X\cap A)\cup(X\cap C_E A)$.
   Si $A\cap X=B$, on a donc $X = B\cup(X\cap C_E A)$.
   On vérifie aisément que, si $X = B\cup C$ avec $C\in\mathscr{P}(E\setminus A)$, alors X est solution de $A\cap X=B$.

Exercice 2.4

1. # $\forall n,n'\in\mathbb{N},\ f(n)=f(n') \Rightarrow 2n=2n' \Rightarrow n=n'$.
   Donc f est injective.
   # 3 ne possède pas d'antécédent par f.
   Donc f n'est pas surjective.
   # $g(6)=g(3)$.
   Donc g n'est pas injective.
   # $\forall p\in\mathbb{N}$, on pose $n=2p$. On a bien $g(n)=p$.
   Donc g est surjective.
   Ni f, ni g ne sont bijectives.
2. # $\forall n\in\mathbb{N}$, si n est pair, $(f\circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\frac{n}{2}\right) = n$,
   si n est impair, $(f\circ g)(n) = f(g(n)) = f(n) = 2n$.

. # $\forall n\in\mathbb{N}$, $(g\circ f)(n) = g(2n) = n$.
   Donc $g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 2.5

1. Réflexive : $\forall x\in\mathbb{Z},\ x^2+x=x^2+x$ donc $x\mathscr{R}x$.
   Symétrique : $\forall x,y\in\mathbb{Z},\ x\mathscr{R}y \Rightarrow x^2+x=y^2+y \Rightarrow y^2+y=x^2+x \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
   Transitive : $\forall x,y,z\in\mathbb{Z},\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x^2+x=y^2+y$ et $y^2+y=z^2+z$
   $\Rightarrow x^2+x=z^2+z \quad \Rightarrow x\mathscr{R}z$.
2. $\mathrm{Cl}(0) = \{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\mathscr{R}0\} = \{x\in\mathbb{Z}\ /\ x^2+x=0\} = \{-1;0\}$.
   $\mathrm{Cl}(1) = \{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\mathscr{R}1\} = \{x\in\mathbb{Z}\ /\ x^2+x=2\} = \{x\in\mathbb{Z}\ /\ x^2+x-2=0\} = \{-2;1\}$.
   En effet, $x^2+x-2=0$; $\Delta = 1-4\times 2 = 9 = 3^2$; $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.
   $\mathrm{Cl}(x) = \{y\in\mathbb{Z}\ /\ x\mathscr{R}y\} = \{y\in\mathbb{Z}\ /\ x^2+x=y^2+y\}$.
   L'équation $x^2+x=y^2+y$ est une équation de degré 2 en y où x est une constante
   $x^2+x=y^2+y \Leftrightarrow x^2+x-y^2-y=0 \Leftrightarrow x^2-y^2+x-y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)+x-y=0$
   $\Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow x-y=0$ ou $x+y+1=0$
   $\Leftrightarrow y=x$ ou $y=-x-1$.
   Donc $\mathrm{Cl}(x) = \{-x-1;x\}$.