



Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 1 : Unité fondamentale

Examen 2ème Session
Septembre

1er semestre

2003/2004
3 heures

Instructions aux étudiants :

1. Tous documents interdits excepté le formulaire sur les D.L et le formulaire sur les dérivées.
2. L'usage des calculatrices est interdit.
3. Utiliser des copies différentes pour les exercices d'analyse et ceux d'algèbre.

1. Analyse

Exercice 1.1

En utilisant la définition des limites, montrer que :

- a. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x = -4$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} = 2$

Exercice 1.2

Pour chacune des fonctions $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ et $g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$,

- a. donner l'ensemble de définition.
- b. étudier la continuité et d'éventuels prolongements par continuité.
- c. étudier la dérivabilité (ou des prolongements s'ils existent).

Exercice 1.3

Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Exercice 1.4

En utilisant le changement de variable $u = e^x$, trouver une primitive de $f(x) = \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 1.5

En utilisant une intégration par parties, calculer $I = \int x \operatorname{Arctan} x \, dx$.

2. Algèbre

Exercice 2.1

Soit \mathcal{S} l'ensemble des suites numériques réelles.

On dit qu'une suite u de \mathcal{S} est presque nulle si et seulement si l'ensemble des termes non nuls de u est fini.

Soit \mathcal{S}_0 l'ensemble des suites numériques réelles presque nulles.

Montrer que, muni des lois usuelles, \mathcal{S}_0 est un \mathbb{R} -e.v.

Exercice 2.2

Soit E l'espace vectoriel réel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Pour tout réel a , on considère l'application $\chi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$\begin{array}{ll} x \mapsto 1 & \text{si } x = a \\ x \mapsto 0 & \text{si } x \neq a \end{array}$$

Montrer que la famille $(\chi_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

2. Qu'en déduit-on sur la dimension de E ?

Exercice 2.3

Soit E un K -e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient A et B deux s.e.v. de E tels que $\dim A + \dim B > n$.

Montrer que la somme $A + B$ n'est pas directe.

Exercice 2.4

Soit E l'espace vectoriel réel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soient F l'ensemble des applications de E qui s'annulent en 1 et G l'ensemble des applications linéaires de E . C'est-à-dire $F = \{f \in E / f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E / \exists a \in \mathbb{R} / f(x) = ax \forall x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des s.e.v. de E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 2.5

On considère l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (1).

1. Vérifier que $y_1(t) = \cos t$ est une solution de (1).
2. Vérifier que $y_2(t) = \sin t$ est une solution de (1).
3. Quelle est la dimension de $\langle y_1, y_2 \rangle$?