



Correction

1. Analyse

Exercice 1.1

a. $|(x^2 - 5x) - (-4)| = |x^2 - 5x + 4| = |(x - 1)(x - 4)| = |x - 1||x - 4|$

$$\begin{aligned} &|x - 1| < 1 \\ \Leftrightarrow &-1 < x - 1 < 1 \\ \Leftrightarrow &-4 < x - 4 < -2 \\ \Rightarrow &2 < |x - 4| < 4 \end{aligned}$$

Donc $|x - 1| < 1 \Rightarrow |x - 1||x - 4| < 4|x - 1|$.

D'où $\forall \varepsilon > 0$, on pose $\eta = \inf\left(\frac{\varepsilon}{4}, 1\right)$.

On a bien :

$$\begin{aligned} &|x - 1| < \eta \\ \Rightarrow &|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } |x - 1| < 1 \\ \Rightarrow &|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } |x - 4| < 4 \\ \Rightarrow &|x - 1||x - 4| < \varepsilon \\ \Rightarrow &|(x^2 - 5x) - (-4)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

b. $|\sqrt{x-4} - 2| = \left| \frac{x}{\sqrt{x-4} + 2} \right| = \frac{|x|}{|\sqrt{x-4} + 2|}$.

$$\begin{aligned} &|x| < 1 \\ \Leftrightarrow &-1 < x < 1 \\ \Leftrightarrow &3 < x + 4 < 5 \\ \Rightarrow &\sqrt{3} < \sqrt{x+4} < \sqrt{5} \\ \Rightarrow &2 + \sqrt{3} < \sqrt{x+4} + 2 < 2 + \sqrt{5} \\ \Rightarrow &\frac{1}{2 + \sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} < \frac{1}{2 + \sqrt{3}} < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow &\frac{1}{|\sqrt{x+4} + 2|} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où $\forall \varepsilon > 0$, on pose $\eta = \inf(2\varepsilon, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a bien : } & |x| < \eta \\ \Rightarrow & |x| < 2\varepsilon \text{ et } |x| < 1 \\ \Rightarrow & |x| < 2\varepsilon \text{ et } \frac{1}{|\sqrt{x+4} + 2|} < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow & |\sqrt{x-4} - 2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Exercice 1.2

1.
 - a. $D_f =]0; +\infty[$
 - b. f est continue sur $]0; +\infty[$ car c'est la composée de fonctions continues.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = 0$ donc f peut être prolongée par continuité en 0.
 - c. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est la composée de fonctions dérivables.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \ln x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

2.
 - a. $D_g =]0; +\infty[$
 - b. g est continue sur $]0; +\infty[$ car c'est la composée de fonctions continues.
 $e^x - 1 \sim_0 x$ donc $\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \sim_0 \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$
 donc g peut être prolongée par continuité en 0.
 - c. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est la composée de fonctions dérivables.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 donc la prolongée de g en 0 est dérivable en 0.

Exercice 1.3

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \times \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}$$

On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \sin' \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \cos' \frac{\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$.

Exercice 1.4

On pose $u = e^x$.

On a $x = \ln u$ et $dx = \frac{1}{u} du$.

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{1 + u^2}{1 + u} \times \frac{1}{u} du.$$

On a $\frac{1 + u^2}{1 + u} \times \frac{1}{u} = 1 + \frac{1 - u}{u^2 + u} = 1 + \frac{1 - u}{u(1 + u)} = 1 + \frac{a}{u} + \frac{b}{1 + u}$.

En identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -2$.

D'où $\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x} dx = u + \ln|u| - 2 \ln|1 + u| = e^x + x - 2 \ln(1 + e^x)$.

Exercice 1.5

Par intégration par partie :

$$u = \arctan x \quad v' = x$$
$$u' = \frac{1}{1+x^2} \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x)$$
$$= \frac{1}{2}[(x^2 + 1) \arctan x - x]$$

2. Algèbre

Exercice 2.1

Muni des lois usuelles, \mathcal{S} est un \mathbb{R} -e.v.

On a $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ et \mathcal{S}_0 est muni des mêmes lois que \mathcal{S} .

Pour que \mathcal{S}_0 soit un \mathbb{R} -e.v., il suffit que \mathcal{S}_0 soit un s.e.v. de \mathcal{S} .

- La suite nulle 0 appartient à \mathcal{S}_0 donc $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$.
- Soient u et v deux suites de \mathcal{S}_0 et soient λ, μ deux réels.

$$u \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, u_n = 0$$

$$v \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_2, v_n = 0$$

On pose $n_0 = \sup(n_1, n_2)$.

$$\forall n \geq n_0, u_n = v_n = 0 \text{ donc } \lambda u_n + \mu v_n = 0.$$

Ce qui signifie que l'ensemble des termes non nuls de la suite $\lambda u + \mu v$ est fini.

C'est-à-dire $\lambda u + \mu v \in \mathcal{S}_0$.

Exercice 2.2

1. Soit f une C.L. des $(\chi_a)_{a \in \mathbb{R}}$.

Il existe un sous-ensemble fini $J \subset \mathbb{R}$ tel que $f = \sum_{a \in J} \lambda_a \chi_a$.

On a $f = 0$.

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{a \in J} \lambda_a \chi_a \right)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{a \in J} \lambda_a \chi_a(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vrai, en particulier, pour tout $x = b \in I$

$$\Rightarrow \sum_{a \in J} \lambda_a \chi_a(b) = 0 \quad \forall b \in I$$

$$\Rightarrow \lambda_b = 0 \quad \forall b \in I$$

2. $(\chi_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille infinie libre donc $\dim E = +\infty$.

Exercice 2.3

On a $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$. Or $A + B \subset E$ donc $\dim(A + B) \leq n$.

D'où $\dim A + \dim B - \dim(A \cap B) \leq n$ avec $\dim A + \dim B > n$.

On a nécessairement $\dim(A \cap B) > 0$ c'est-à-dire $A \cap B \neq \{0\}$.

Exercice 2.4

1.
 - # La fonction nulle 0 appartient à F . Donc $F \neq \emptyset$.
 - # Soient $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 $(\lambda f + \mu g)(1) = (\lambda f)(1) + (\mu g)(1) = \lambda \cdot f(1) + \mu \cdot g(1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$.
Donc $\lambda f + \mu g \in F$.
 - # La fonction nulle 0 appartient à G . Donc $G \neq \emptyset$.
 - # Soient $f, g \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 $f \in G \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} / f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $g \in G \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} / g(x) = bx \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f)(x) + (\mu g)(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) = \lambda \cdot ax + \mu \cdot bx = (\lambda \cdot a + \mu \cdot b)x$.
avec $\lambda \cdot a + \mu \cdot b \in \mathbb{R}$.
Donc $\lambda f + \mu g \in G$.
2. On doit montrer
 - i) $\forall g \in E; \exists g_1 \in F$ et $\exists g_2 \in G$ tels que $g = g_1 + g_2$
 - ii) $F \cap G = \{0\}$

i) Soit $g \in E$.

On pose $b = g(1)$ et $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto bx$$

On a bien $g_2 \in G$.

On pose $g_1 = g - g_2$. On a $g_1(1) = g(1) - g_2(1) = b - b = 0$.

Donc $g_1 \in F$.

ii) Soit $g \in F \cap G$.

$g \in G \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} / g(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Or $g(1) = 0$ car $g \in F$ donc $a = 0$ et $g = 0$.

Exercice 2.5

1. $\forall t \in \mathbb{R}, y_1(t) = \cos t, y_1'(t) = -\sin t$ et $y_1''(t) = -\cos t$
Donc, $\forall t \in \mathbb{R}, y_1(t) + y_1''(t) = 0$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y_2(t) = \sin t, y_2'(t) = \cos t$ et $y_2''(t) = -\sin t$
Donc, $\forall t \in \mathbb{R}, y_2(t) + y_2''(t) = 0$.
3. Il faut vérifier la liberté de (y_1, y_2) .
 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$
 $\Leftrightarrow \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Vrai en particulier pour $x = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$ donc $\lambda_2 = 0$.