



Instructions aux étudiants :

1. Tous documents interdits
2. L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1

Soient E un \mathbb{R} -e.v. et F un s.e.v. de E . Soit G le complémentaire de F dans E i.e. $G = C_E F$.

1. Montrer que : $\forall x \in F, \forall y \in G, \text{ on a } x + y \in G$.
2. En déduire que, si $F \neq E$, alors $\text{Vect}(G) = E$.

Exercice 2

Soit K un corps commutatif et soit E un K -e.v. de dim 3. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.
2. En déduire que $\dim \text{Ker } u \geq 2$.
3. Montrer que : $\exists a \in E$ et $\exists f \in E^* / \forall x \in E, u(x) = f(x).a$
(on pourra considérer une base de $\text{Ker } u$ et la compléter en une base de E).

Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{C} des matrices réelles d'ordre 2 qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que \mathcal{C} est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Exercice 4

Soient E un \mathbb{R} -e.v. de dimension 3 et $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f l'endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$) défini par $A = \mathcal{M}_e(f) = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -15 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\text{Ker } f$.
2. Déterminer $\text{Im } f$.
3. Déterminer $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$.
4. Déterminer $\text{Ker } f + \text{Im } f$.
5. Combien vaut f^2 ?