



Correction

Exercice 1

- Démonstration par l'absurde.
On suppose la négation de l'expression : $\exists x \in F$ et $\exists y \in G / x + y \notin G$
C'est-à-dire $\exists x \in F$ et $\exists y \in G / x + y \in F$
Puisque $x \in F$, on a $-x \in F$ (car F est stable par multiplication par un scalaire ici -1).
D'où $(-x) + (x + y) \in F$ (car F est stable par addition).
On a donc $y \in F$: ce qui est contraire aux hypothèses.
- Si $F \neq E$, on a $C_E F \neq \emptyset$. Donc $\exists y \in G$.
Si $F = \emptyset$, $G = E$ et $\text{Vect}(G) = E$.
Si $F \neq \emptyset$, nous allons montrer que $F \subset \text{Vect}(G)$.
 $\forall x \in F, x + y \in G$ (d'après le 1°).
 $\Rightarrow x + y \in \text{Vect}(G)$ (car $G \subset \text{Vect}(G)$).
Or $y \in \text{Vect}(G)$ (toujours car $G \subset \text{Vect}(G)$).
Donc $-y \in \text{Vect}(G)$ (car $\text{Vect}(G)$ est un s.e.v.).
D'où $(x + y) + (-y) \in \text{Vect}(G)$ ($\text{Vect}(G)$ est stable par addition).
On a donc $x \in \text{Vect}(G)$.

Puisque $F \subset \text{Vect}(G)$ et $G \subset \text{Vect}(G)$, $E = F \cup G \subset \text{Vect}(G)$.

On a $\text{Vect}(G) \subset E$ (car E est un s.e.v. qui contient G).

D'où le résultat.

Exercice 2

- $\forall y \in \text{Im } u, \exists t \in E / y = u(t)$.
On a donc $u(y) = u(u(t)) = u^2(t) = 0(t) = 0$.
Donc $y \in \text{Ker } u$.
- On a $\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u$.
Or $\dim \text{Im } u \leq \dim \text{Ker } u$ car $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.
D'où $\dim E \leq 2 \times \dim \text{Ker } u \Leftrightarrow \dim \text{Ker } u \geq \frac{1}{2} \dim E = \frac{3}{2}$.
Puisqu'une dimension est un entier, on obtient $\dim \text{Ker } u \geq 2$.

3. Si $\dim \text{Ker } u = 3$, on a $u = 0$ et l'expression est vraie avec $a = 0$ et f quelconque.

Si $\dim \text{Ker } u = 2$, soit (b_1, b_2) une base de $\text{Ker } u$.

On complète cette base en une base (b_1, b_2, b_3) de E .

Pour tout x de E , $\exists (x_1, x_2, x_3) \in K^3 / x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3$.

On a donc $u(x) = u(x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3) = x_3 u(b_3)$.

On pose $a = u(b_3)$.

On vérifie aussi que l'application $x \mapsto x_3$ est une forme linéaire.

Exercice 3

1. On a $\mathcal{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c \text{ et } d \text{ réels} / AM = MA \right\}$.

Or $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a+3b & -a+5b \\ 2c+3d & -c+5d \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c = 2a+3b \\ 2b-d = -a+5b \\ 3a+5c = 2c+3d \\ 3b+5d = -c+5d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3b \\ d = a-3b \\ d = a+c \\ c = -3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3b \\ d = a-3b \end{cases}$$

Et $\mathcal{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a-3b \end{pmatrix} / a \text{ et } b \text{ réels} \right\}$.

2. $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C} = \text{Vect}(M_1, M_2)$.

$\{M_1, M_2\}$ est une famille libre donc c'est une base de \mathcal{C} et $\dim \mathcal{C} = 2$.

Exercice 4

1. Soit $u \in E$ de coordonnées $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dans (e) .

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 5y - 15z = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \\ 6x + 3y - 9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2x - y + 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow u \begin{pmatrix} x \\ -2x + 3z \\ z \end{pmatrix} \text{ dans } (e)$$

Si on pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans (e) , on obtient :

$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow u$ C.L. de $\{u_1, u_2\}$. D'où $\text{Ker } f = \langle u_1, u_2 \rangle$.

Puisque $\{u_1, u_2\}$ est une famille libre, c'est une base de $\text{Ker } f$.

On a donc $\dim \text{Ker } f = 2$.

2. $\dim E = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f.$

Donc $\dim \text{Im} f = 1.$

Soit $v = f(e_2).$

On a $v \in \text{Im} f, v \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans (e) et $v \neq 0.$

Donc $\{v\}$ est une base de $\text{Im} f.$ On a donc $\dim \text{Im} f = 1.$

3. On a $(\text{Ker} f \cap \text{Im} f) \subset \text{Im} f$ avec $\dim \text{Im} f = 1$ d'où $\dim(\text{Ker} f \cap \text{Im} f) = 0$ ou $1.$

On a $\dim(\text{Ker} f \cap \text{Im} f) = 0 \Leftrightarrow \det(u_1, u_2, v) \neq 0.$

Or $\det(u_1, u_2, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ donc $\dim(\text{Ker} f \cap \text{Im} f) = 1.$

(u_1, u_2, v) est une famille liée. Plus précisément, v est une C.L. de u_1 et $u_2.$

On obtient donc $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$ et $\text{Ker} f \cap \text{Im} f = \text{Im} f.$

4. $\text{Ker} f + \text{Im} f = \text{Ker} f.$

5. $f^2 = f \circ f.$

$\forall x \in E, (f \circ f)(x) = f(f(x)).$

Mais $f(x) \in \text{Im} f \subset \text{Ker} f$ donc $f(f(x)) = 0$ c'est-à-dire $f^2 = 0.$