Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Algèbre

Examen partiel — **2ème semestre** — **2003/2004**

01 avril 2004 — **10 h 00 - 12 h 00**

Instructions aux étudiants :

1. **Tous documents interdits**
2. **L'usage des calculatrices est interdit.**

Exercice 1

Soit K un corps commutatif et soit E un K-e.v. Soit φ une forme bilinéaire sur E.
On dit que φ est antisymétrique si et seulement si $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y) \ \ \forall x,y \in E$.
On dit que φ est alternée si et seulement si $\varphi(u,u) = 0 \ \ \forall u \in E$.

1. Déterminer les formes bilinéaires qui sont à la fois symétriques et antisymétriques.

On suppose maintenant que K est de caractéristique différente de 2.

2. Montrer que : φ alternée $\Leftrightarrow$ φ antisymétrique.
3. Montrer que toute forme bilinéaire sur E est la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique.
4. Soient $\mathscr{A}(E) = \{f \in \mathscr{B}(E) \,/\, f \text{ antisymétrique}\}$ et $\mathscr{S}(E) = \{f \in \mathscr{B}(E) \,/\, f \text{ symétrique}\}$.
   $\mathscr{A}(E)$ et $\mathscr{S}(E)$ sont-ils des s.e.v. de $\mathscr{B}(E)$? Conclure.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = 25x_1^2 + 18x_2^2 + (46+\alpha)x_3^2 - 30x_1x_2 + 10x_1x_3 - 48x_2x_3 .$$

1. Donner la matrice A de la forme bilinéaire symétrique f associée à q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est un produit scalaire.
3. On prend $\alpha = 5$. Montrer que les vecteurs :
   $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix}$ forment une base orthogonale relativement à q.

Exercice 3

Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit E un K-e.v. de dimension finie.
Soit $GL(E) = \{v \in \mathscr{L}_K(E) \,/\, v \text{ inversible}\}$ et $\mathscr{Q}(E) = \{\text{formes quadratiques sur } E\}$.
Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur $\mathscr{Q}(E)$ par $q_1 \,\mathscr{R}\, q_2 \Leftrightarrow \exists u \in GL(E) \,/\, q_1 = q_2 \circ u$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ définit bien une relation d'équivalence.
   (Si $q_1 \,\mathscr{R}\, q_2$, on dit alors que q_1 et q_2 sont équivalentes)
2. Soient f_1 et f_2 les formes polaires associées respectivement à q_1 et q_2.
   Montrer que q_1 et q_2 sont équivalentes ssi $\exists v \in GL(E) \,/\ \ \forall x,y \in E,\ f_1(x,y) = f_2(v(x),v(y))$.