Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Algèbre

Examen partiel **2ème semestre** **2003/2004**
01 avril 2004 **10 h 00 - 12 h 00**

Correction

Exercice 1

1. Soit f une forme bilinéaire symétrique et antisymétrique.
On a donc, $\forall x,y \in E$, $f(y,x) = f(x,y) = -f(x,y)$ c'est-à-dire $2f(x,y) = 0$.
Si $\chi(K) = 2$, lesformes bilinéaires symétriques et antisymétriques sont les mêmes.
Si $\chi(K) \neq 2$, la seule forme bilinéaire à la fois symétrique et antisymétrique est la forme nulle.

2. $(\Rightarrow)$ On suppose que φ est alternée.
$\forall x,y \in E$, $\varphi(x+y,x+y) = 0$
$\Rightarrow$ $\varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) = 0$
$\Rightarrow$ $\varphi(x,y) + \varphi(y,x) = 0$
$\Rightarrow$ $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$ donc φ est antisymétrique.
$(\Leftarrow)$ On suppose que φ est antisymétrique.
$\forall x,y \in E$, $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.
C'est, en particulier, vrai si $x = y$.
On a donc $\varphi(x,x) = -\varphi(x,x)$ c'est-à-dire $2\varphi(x,x) = 0$ et (puisque $\chi(K) \neq 2$) $\varphi(x,x) = 0$.

3. Soit f une forme bilinéaire sur E.
Supposons que $f = a + s$ où a est antisymétrique et s est symétrique.
C'est-à-dire, $\forall x,y \in E$, $f(x,y) = a(x,y) + s(x,y)$.
On a donc $\forall x,y \in E$, $f(y,x) = a(y,x) + s(y,x) = -a(x,y) + s(x,y)$.
D'où $a(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x))$ et $s(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x))$ $\forall x,y \in E$

Pour toute forme bilinéaire f, soient a et s définis comme ci-dessus.
Il reste à vérifier que l'on a : # a antisymétrique
s symétrique
$f = a + s$

- $\forall x,y \in E$, $a(y,x) = \frac{1}{2}(f(y,x) - f(x,y)) = -\frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x)) = -a(x,y)$.
- $\forall x,y \in E$, $s(y,x) = \frac{1}{2}(f(y,x) + f(x,y)) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x)) = s(x,y)$.
- $\forall x,y \in E$, $a(x,y) + s(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x)) + \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x)) = f(x,y)$.

4.
- $f = 0 \in \mathscr{A}(E)$ donc $\mathscr{A}(E) \neq \emptyset$.
- Soient $f,g \in \mathscr{A}(E)$ et $\lambda,\mu \in K$.
$\forall x,y \in E$, $(\lambda f + \mu g)(y,x) = \lambda f(y,x) + \mu g(y,x) = -\lambda f(x,y) - \mu g(x,y) = -(\lambda f + \mu g)(x,y)$.
Donc $(\lambda f + \mu g) \in \mathscr{A}(E)$
- $f = 0 \in \mathscr{S}(E)$ donc $\mathscr{S}(E) \neq \emptyset$.

- Soient $f,g \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda,\mu \in K$.
  $\forall x,y \in E$, $(\lambda f + \mu g)(y,x) = \lambda f(y,x) + \mu g(y,x) = \lambda f(x,y) + \mu g(x,y) = (\lambda f + \mu g)(x,y)$.
  Donc $(\lambda f + \mu g) \in \mathcal{S}(E)$

Donc $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont deux s.e.v. de $\mathcal{B}(E)$. De plus, on a $\mathcal{B}(E) = \mathcal{A}(E) \oplus \mathcal{S}(E)$.

Exercice 2

1. $A = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 5 \\ -15 & 18 & -24 \\ 5 & -24 & 46+a \end{pmatrix} = \mathcal{M}_e(f)$ où (e) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. $q(x) = (5x_1)^2 + 2\times(5x_1)(-3x_2+x_3) + 18x_2^2 + (46+a)x_3^2 - 48x_2x_3$.
$= (5x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 + 6x_2x_3 - x_3^2 + 18x_2^2 + (46+a)x_3^2 - 48x_2x_3$.
$= (5x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + 9x_2^2 - 42x_2x_3 + (45+a)x_3^2$.
$= (5x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + (3x_2)^2 - 2\times 3x_2 \times 7x_3 + (45+a)x_3^2$.
$= (5x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + (3x_2 - 7x_3)^2 + (a-4)x_3^2$.
f est un produit scalaire si et seulement si sa signature est (3;0) c'est-à-dire si et seulement si $a > 4$.

3. Si $a = 5$, on a $A = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 5 \\ -15 & 18 & -24 \\ 5 & -24 & 51 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs de la famille $(b) = (b_1,b_2,b_3)$ forment une base orthogonale si et seulement si $\mathcal{M}_b(f)$ est une matrice diagonale.
Si $P = P_{e\to b}$, alors $\mathcal{M}_b(f) = {}^tP\ \mathcal{M}_e(f)\ P = {}^tPAP$.
$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 18 \\ 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$, ${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 18 & 35 & 15 \end{pmatrix}$, $AP = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ -15 & 45 & 0 \\ 5 & -105 & 15 \end{pmatrix}$ et ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 225 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. Rappel : $GL(E)$ est un groupe (Groupe Linéaire).
<u>Réflexive</u> $\forall q \in \mathcal{Q}(E)$, $q = q \circ \mathrm{Id}_E$ avec $\mathrm{Id}_E \in GL(E)$. Donc $q\ \mathcal{R}\ q$.
<u>Symétrique</u> $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(E)$
$q_1\ \mathcal{R}\ q_2$
$\Leftrightarrow$ $\exists u \in GL(E)$ / $q_1 = q_2 \circ u$
$\Rightarrow$ $q_2 = q_1 \circ u^{-1}$ avec $u^{-1} \in GL(E)$
$\Rightarrow$ $q_2\ \mathcal{R}\ q_1$.
<u>Transitive</u> $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{Q}(E)$
$q_1\ \mathcal{R}\ q_2 \Leftrightarrow \exists u \in GL(E)$ / $q_1 = q_2 \circ u$
$q_2\ \mathcal{R}\ q_3 \Leftrightarrow \exists v \in GL(E)$ / $q_2 = q_3 \circ v$
$\Rightarrow$ $q_1 = (q_3 \circ v) \circ u = q_3 \circ (v \circ u)$ avec $(v \circ u) \in GL(E)$

2. $(\Rightarrow)$ On suppose que $q_1\ \mathcal{R}\ q_2$ c'est-à-dire qu'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q_1 = q_2 \circ u$.
$\forall x,y \in E$, $f_1(x,y) = \frac{1}{2}(q_1(x+y) - q_1(x) - q_1(y))$
$= \frac{1}{2}((q_2 \circ u)(x+y) - (q_2 \circ u)(x) - (q_2 \circ u)(y))$
$= \frac{1}{2}(q_2(u(x+y)) - q_2(u(x)) - q_2(u(y)))$
$= \frac{1}{2}(q_2(u(x)+u(y)) - q_2(u(x)) - q_2(u(y)))$
$= f_2(u(x),u(y))$.
$(\Leftarrow)$ On suppose que $\exists v \in GL(E)$ / $\forall x,y \in E$, $f_1(x,y) = f_2(v(x),v(y))$.
On a : $\forall x \in E$, $q_1(x) = f_1(x,x) = f_2(v(x),v(x)) = q_2(v(x)) = (q_2 \circ v)(x)$.