Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Algèbre

Examen 1ère session	**2ème semestre**	**2003/2004**
07 juin 2004		**13h30 - 15h30**

Instructions aux étudiants :

1. **Tous documents interdits**
2. **L'usage des calculatrices est interdit.**

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (e) la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Soit f la forme hermitienne définie sur $\mathbb{C}^3$ par $\mathscr{M}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1+3i & 1 \\ 1-3i & 19 & 4-6i \\ 1 & 4+6i & 5-a \end{pmatrix}$.

1. Donner la forme analytique de f et sa forme quadratique associée.
2. Pour quelles valeurs de a, f est-elle un produit scalaire complexe?

Exercice 2

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ unitaire. On pose $f = \mathrm{Id}_E - u$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont orthogonaux.
2. En déduire que $\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit f une forme hermitienne non dégénérée sur E.
Soit $a \in E$ avec $a \neq 0$.
On définit $u_a \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ par $u_a(x) = x + f(x,a)a$ pour tout $x \in E$.

1. a. Expliciter l'ensemble $\{x \in E \ / \ u_a(x) = x\}$.
   b. En déduire que $\lambda_0 = 1$ est une valeur propre de u_a.
2. a. Montrer que, si a est isotrope, alors $\lambda_0 = 1$ est la seule valeur propre de u_a.
   b. Trouver l'autre valeur propre dans le cas contraire.