Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Algèbre

Examen 1ère session	**2ème semestre**	**2003/2004**
07 juin 2004		**13h30 - 15h30**

Correction

Exercice 1

Soient $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^3$.

1. $$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+3i & 1 \\ 1-3i & 19 & 4-6i \\ 1 & 4+6i & 5-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \overline{y_3} \end{pmatrix}$$
$$= x_1\overline{y_1} + (1+3i)x_1\overline{y_2} + x_1\overline{y_3} + (1-3i)x_2\overline{y_1} + 19x_2\overline{y_2} + (4-6i)x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_1} + (4+6i)x_3\overline{y_2} + (5-a)x_3\overline{y_3}.$$

$$q_f(x) = f(x,x)$$
$$= x_1\overline{x_1} + (1+3i)x_1\overline{x_2} + x_1\overline{x_3} + (1-3i)x_2\overline{x_1} + 19x_2\overline{x_2} + (4-6i)x_2\overline{x_3} + x_3\overline{x_1} + (4+6i)x_3\overline{x_2} + (5-a)x_3\overline{x_3}.$$

2. $$\begin{aligned} q_f(x) = \ & (x_1 + (1-3i)x_2 + x_3)(\overline{x_1} + (1+3i)\overline{x_2} + \overline{x_3}) - 10x_2\overline{x_2} - (1-3i)x_2\overline{x_3} - (1+3i)x_3\overline{x_2} - x_3\overline{x_3} \\ & +19x_2\overline{x_2} + (4-6i)x_2\overline{x_3} + (4+6i)x_3\overline{x_2} + (5-a)x_3\overline{x_3} \\ = \ & |x_1 + (1-3i)x_2 + x_3|^2 + 9x_2\overline{x_2} + (3-3i)x_2\overline{x_3} + (3+3i)x_3\overline{x_2} + (4-a)x_3\overline{x_3} \\ = \ & |x_1 + (1-3i)x_2 + x_3|^2 + (3x_2 + (1+i)x_3)(3\overline{x_2} + (1-i)\overline{x_3}) - 2x_3\overline{x_3} + (4-a)x_3\overline{x_3} \\ = \ & |x_1 + (1-3i)x_2 + x_3|^2 + |3x_2 + (1+i)x_3| + (2-a)x_3\overline{x_3} \\ = \ & |x_1 + (1-3i)x_2 + x_3|^2 + |3x_2 + (1+i)x_3| + (2-a)|x_3|^2. \end{aligned}$$

f est un produit scalaire si et seulement si $a < 2$.

Exercice 2

1. Soient $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Id}_E - u)(x) = 0 \Leftrightarrow x - u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = x$
   et $y \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists t \in E \,/\, f(t) = y \Leftrightarrow y = u(t) - t$.

$$<x\,;y> = <x\,;u(t) - t> = <x\,;u(t)> - <x\,;t> = <u(x)\,;u(t)> - <x\,;t> = <x\,;t> - <x\,;t> = 0.$$

2. On a : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$ (propriété de toute application linéaire)
   et $\dim (\operatorname{Im} f)^{\perp} + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$ (car un produit scalaire est non dégénéré).
   Donc $\dim \operatorname{Ker} f = \dim (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.
   D'après le 1°), on a $\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.
   D'où l'égalité.

Exercice 3

1. a. $\{x \in E \ / \ u_a(x) = x\}$
$= \{x \in E \ / \ x + f(x,a)a = x\}$
$= \{x \in E \ / \ f(x,a)a = 0\}$
$= \{x \in E \ / \ f(x,a) = 0\}$
$= \{a\}^\perp$
$= \langle a \rangle^\perp$.

b. Puisque f est non dégénérée, on a $E = \langle a \rangle \oplus \langle a \rangle^\perp$.
On a $\dim \langle a \rangle = 1$ et $\dim E \geq 2$.
Donc $\dim \langle a \rangle^\perp \geq 1$.
Il existe donc des vecteurs x non nuls tels que $u_a(x) = x$ c'est-à-dire $\lambda_0 = 1$ est une valeur propre de u_a.

2. Soit x_1 un vecteur propre de u_a de valeur propre λ_1 i.e. $u_a(x_1) = \lambda_1 x_1$ et $x_1 \neq 0$.

Si $x_1 \in \langle a \rangle^\perp$, alors $u_a(x_1) = x_1$ et donc $\lambda_1 = 1$.
Si $x_1 \notin \langle a \rangle^\perp$, puisque $E = \langle a \rangle \oplus \langle a \rangle^\perp$, alors $x_1 \in \langle a \rangle$.
Donc il existe un réel k tel que $x_1 = ka$.
De plus, puisque $x_1 \neq 0$, on a $k \neq 0$.
Puisque $u_a(x_1) = \lambda_1 x_1$, on a donc $x_1 + f(x_1,a)a = \lambda_1 x_1$.
D'où $ka + f(ka,a)a = \lambda_1 ka$ et $ka + kf(a,a)a = k\lambda_1 a$.
Soit $a + f(a,a)a = \lambda_1 a$.

a. Si a est isotrope, $f(a,a) = 0$ et donc $a = \lambda_1 a$ c'est-à-dire $\lambda_1 = 1$.
b. Si a n'est pas isotrope, $[1 + f(a,a)]a = \lambda_1 a$ donc $\lambda_1 = 1 + f(a,a)$.