



Instructions aux étudiants :

1. Tous documents interdits
2. L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et e la base canonique de \mathbb{C}^3 .

Soit f la forme hermitienne définie sur \mathbb{C}^3 par $\mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1+3i & -2+5i \\ 1-3i & 33+a & 10+15i \\ -2-5i & 10-15i & 30 \end{pmatrix}$.

1. Donner la forme analytique de f et sa forme quadratique associée.
2. Pour quelles valeurs de a , f est-elle un produit scalaire complexe?

Exercice 2

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq 2\}$.

Soit f la forme bilinéaire définie par $f(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Expliciter la matrice de f par rapport à la base $(1, X, X^2)$ de E .
2. Donner la matrice de l'adjoint relativement à f de l'opérateur dérivé.
3. Donner la matrice de l'adjoint relativement à f de l'application $\varphi : E \rightarrow E$
 $P(X) \mapsto P(-X)$

Exercice 3

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $f = 0 \Leftrightarrow \langle f(u), u \rangle = 0 \quad \forall u \in E$.
(On pourra considérer $u = x + iy$ et $u = x + y$ avec $x, y \in E$)
2. Donner un exemple, montrant que cette équivalence est fautive si l'on considère l'espace euclidien \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique.