Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Algèbre

Examen 2ème session | **2ème semestre** | **2003/2004**
Septembre 2004 | | **2h00**

Correction

Exercice 1

Soient $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^3$.

1. $$f(x,y) = {}^tXA\overline{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+3i & -2+5i \\ 1-3i & 33+a & 10+15i \\ -2-5i & 10-15i & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \overline{y_3} \end{pmatrix}$$

$$= x_1\overline{y_1} + (1+3i)x_1\overline{y_2} + (-2+5i)x_1\overline{y_3} + (1-3i)x_2\overline{y_1}$$
$$+(33+a)x_2\overline{y_2} + (10+15i)x_2\overline{y_3} + (-2-5i)x_3\overline{y_1} + (10-15i)x_3\overline{y_2} + 30x_3\overline{y_3}.$$

$$q_f(x) = f(x,x) = x_1\overline{x_1} + (1+3i)x_1\overline{x_2} + (-2+5i)x_1\overline{x_3} + (1-3i)x_2\overline{x_1}$$
$$+(33+a)x_2\overline{x_2} + (10+15i)x_2\overline{x_3} + (-2-5i)x_3\overline{x_1} + (10-15i)x_3\overline{x_2} + 30x_3\overline{x_3}.$$

2. $$\begin{aligned} q_f(x) = {} & (x_1 + (1-3i)x_2 + (-2-5i)x_3)(\overline{x_1} + (1+3i)\overline{x_2} + (-2+5i)\overline{x_3}) - 10x_2\overline{x_2} - (13+11i)x_2\overline{x_3} \\ & -(13-11i)x_3\overline{x_2} - 29x_3\overline{x_3} + (33+a)x_2\overline{x_2} + (10+15i)x_2\overline{x_3} + (10-15i)x_3\overline{x_2} + 33x_3\overline{x_3} \\ = {} & |x_1 + (1-3i)x_2 + (-2-5i)x_3|^2 + (23+a)x_2\overline{x_2} + (-3+4i)x_2\overline{x_3} + (-3-4i)x_3\overline{x_2} + x_3\overline{x_3} \\ = {} & |x_1 + (1-3i)x_2 + (-2-5i)x_3|^2 + (x_3 + (-3+4i)x_2)(\overline{x_3} + (-3-4i)\overline{x_2}) - 25x_2\overline{x_2} + (23+a)x_2\overline{x_2} \\ = {} & |x_1 + (1-3i)x_2 + (-2-5i)x_3|^2 + |x_3 + (-3+4i)x_2| + (a-2)x_2\overline{x_2} \\ = {} & |x_1 + (1-3i)x_2 + (-2-5i)x_3|^2 + |x_3 + (-3+4i)x_2| + (a-2)|x_2|^2. \end{aligned}$$

f est un produit scalaire si et seulement si $a > 2$.

Exercice 2

1. f est symétrique.

$$f(1,1) = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = 1 \qquad f(1,X) = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} = f(X,1) \qquad f(1,X^2) = \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} = f(1,X^2) = f(X,X)$$

$$f(X,X^2) = \int_0^1 t^3 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} = f(X^2,X) \qquad f(X^2,X^2) = \int_0^1 t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$$

D'où $\mathcal{M}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} = A.$

2. Soit $\Delta : E \to E$

$P \mapsto P'$

$\Delta(1) = 0 = 0.1 + 0.X + 0.X^2$

$\Delta(X) = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2$

$\Delta(X^2) = 2X = 0.1 + 2.X + 0.X^2$

D'où $\mathscr{M}_e(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M.$

$\mathscr{M}_e(\Delta^*) = A^{-1}.{}^tM.A$ où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$

D'où $\mathscr{M}_e(\Delta^*) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 12 & -24 & -26 \\ 0 & 30 & 30 \end{pmatrix}.$

Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, alors $\Delta^*(P) = (-6a_0 + 2a_1 + 3a_2) + (12a_0 - 24a_1 - 26a_2)X + 30\,(a_1 + a_2)X^2$.

3. $\varphi(1) = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2$

$\varphi(X) = -X = 0.1 - 1.X + 0.X^2$

$\varphi(X^2) = X^2 = 0.1 + 0.X + 1.X^2$

D'où $\mathscr{M}_e(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N.$

$\mathscr{M}_e(\varphi^*) = A^{-1}.{}^tN.A = A^{-1}.N.A$

D'où $\mathscr{M}_e(\varphi^*) = \begin{pmatrix} 37 & 24 & 18 \\ -192 & -127 & -96 \\ 180 & 120 & 91 \end{pmatrix}.$

Exercice 3

1. $(\Rightarrow)$ Trivial

$(\Leftarrow)$ On suppose que $<f(u),u> = 0 \quad \forall u \in E$.

On a donc :

$\forall x,y \in E, \quad <f(x+iy),x+iy> = 0$

$\Leftrightarrow\ <f(x),x> - i<f(x),y> + i<f(y),x> + <f(y),y> = 0$

$\Leftrightarrow\ -i<f(x),y> + i<f(y),x> = 0$

$\Leftrightarrow\ <f(x),y> = <f(y),x>$

$\forall x,y \in E, \quad <f(x+y),x+y> = 0$

$\Leftrightarrow\ <f(x),x> + <f(x),y> + <f(y),x> + <f(y),y> = 0$

$\Leftrightarrow\ <f(x),y> + <f(y),x> = 0$

$\Leftrightarrow\ <f(x),y> = -<f(y),x>$

D'où $<f(x),y> = 0 \qquad \forall x,y \in E$

Et $f = 0$ car un produit scalaire est défini donc non dégénéré.

2. Il suffit par exemple de considérer une rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.