Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Analyse

Examen partiel — **2ème semestre** — **2003/2004**
30 mars 2004 — **9 h 00 - 12 h 00**

Instructions aux étudiants :
1. **Tous documents interdits**
2. **L'usage des calculatrices est interdit.**

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right) - \dfrac{2}{n}$ définie pour $n \geq 1$.

Exercice 3

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ pour $n \geq 1$. Soit $v_n = |u_n|$.

1. Etudier la convergence de la série de terme général v_n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln v_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. Montrer la monotonie de la suite v_n.
4. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 4

Soit u une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série de terme général u_n soit convergente. Pour tout entier n, on pose $v_n = (n+1)\times(u_n - u_{n+1})$.

1. Montrer que la série de terme général v_n converge.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 0$.
3. En déduire $\sum\limits_{n\geq 0} u_n = \sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

Exercice 5

1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in \left[0;\dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n};1\right] \end{cases}$.
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.