



Correction

Exercice 1

Pour tout entier n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{2^n n!} = 2 \times \frac{(n+1) \times n!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = 2 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1}$.

Donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{n}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -1$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$.

D'après la règle de D'Alembert, la série converge.

Exercice 2

Pour tout entier n non nul, $\ln\left(\frac{n+4}{n+2}\right) - \frac{2}{n} = \ln\left(1 + \frac{2}{n+2}\right) - \frac{2}{n}$.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{2}{n+2}$ et $\frac{2}{n}$ sont proches de 0.

On a un D.L. en l'infini donné par $\ln\left(1 + \frac{2}{n+2}\right) = \frac{2}{n+2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{2}{n+2}\right)^2\right)$.

Donc $\ln\left(\frac{n+4}{n+2}\right) - \frac{2}{n} = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{(n+2)^2} - \frac{2}{n} + o\left(\left(\frac{2}{n+2}\right)^2\right) = \frac{-4}{n(n+2)} - \frac{2}{(n+2)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Les séries $\sum \frac{-4}{n(n+2)}$ et $\sum \frac{2}{(n+2)^2}$ sont convergentes, il en est donc de même de la série $\sum u_n$.

Exercice 3

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $v_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

De plus $n! \leq n^n$, on a donc $\sqrt[n]{n!} \leq n$ et $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série (positive) divergente, il en est donc de même de la série $\sum v_n$.

2. On a $\ln v_n = -\frac{1}{n} \ln(n!)$.

D'après la formule de Stirling, $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ c'est-à-dire $n! \sim e^{n \ln n - n} \sqrt{2\pi n}$

Donc $\ln v_n \sim -\frac{1}{n} \times (n(\ln n - 1) + \ln \sqrt{2\pi n}) \sim \ln n - 1 - \frac{1}{n} \ln \sqrt{2\pi n}$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n = -\infty$.

Puisque $v_n = e^{\ln v_n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

3. Les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont des fonctions croissantes.

Soit n un entier naturel non nul. On va comparer $\ln v_{n+1}$ et $\ln v_n$.

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = -\frac{1}{n+1} \ln(n+1)! + \frac{1}{n} \ln(n!) = \frac{1}{n} \ln(n!) - \frac{1}{n+1} \ln(n!) - \frac{1}{n+1} \ln(n+1)$$

$$\text{Donc } \ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{\ln(n!)}{n(n+1)} - \frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

Or $n! \leq n^n$, donc $\ln n! \leq \ln n^n$ c'est-à-dire $\ln n! \leq n \ln n$.

$$\text{D'où } \ln v_{n+1} - \ln v_n \leq \frac{\ln n}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln n - \ln(n+1)}{n+1} < 0.$$

On obtient $\ln v_{n+1} < \ln v_n$ et donc $v_{n+1} < v_n$.

La suite v est décroissante.

4. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 4

1. Puisque la suite u est une suite décroissante, la suite v est positive.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n v_k &= \sum_{k=0}^n [(k+1)(u_k - u_{k+1})] = \sum_{k=0}^n [(k+1)u_k - (k+1)u_{k+1}] = \sum_{k=0}^n (k+1)u_k - \sum_{k=0}^n (k+1)u_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (ku_k + u_k) - \sum_{k=1}^{n+1} ku_k = \sum_{k=0}^n ku_k + \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=1}^{n+1} ku_k = \sum_{k=0}^n u_k - (n+1)u_{n+1}. \end{aligned}$$

On a donc $\sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{n \geq 0} u_n$ (la série $\sum u_n$ est une série convergente à termes positifs).

Donc la série $\sum v_n$ est une série à termes positifs qui est majorée. Elle est donc convergente.

2. Puisque, pour tout entier n non nul, $nu_n = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \sum_{n \geq 0} u_n - \sum_{n \geq 0} v_n \in \mathbb{R}$.

Appelons l cette limite.

Si $l \neq 0$, on aurait $u_n \sim \frac{l}{n}$. Ce qui signifierait que la série $\sum u_n$ diverge : contraire aux hypothèses.

Donc, nécessairement, $l = 0$.

3. Trivial, au vu du 2°.

Exercice 5

1. • # Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout entier n .

Soit x un réel de $]0;1[$.

On pose $n_0 = E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

On a : $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{x} (> 0) \Rightarrow (1 >) x > \frac{1}{n} (> 0)$.

C'est-à-dire $x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]$ et $f_n(x) = 0$.

D'où $f_n \xrightarrow{cs} f = 0$.

- On considère la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [0; \frac{1}{n}]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n)| \\ &\geq 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Donc la convergence n'est pas uniforme.

2. • $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{1/n} f_n(t) dt + \int_{1/n}^1 f_n(t) dt = \int_0^{1/n} f_n(t) dt = \int_0^{1/n} n^2 x - n^3 x^2 dt = \left[\frac{n^2}{2} x^2 - \frac{n^3}{3} x^3 \right]_0^{1/n}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{6}$.

- $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0$.