Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Analyse

Examen 1ère session **2ème semestre** **2003/2004**
02 juin 2004 **9h30 - 12h30**

Instructions aux étudiants :

1. **Tous documents interdits**
2. **L'usage des calculatrices est interdit.**

Exercice 1

Soit α un nombre réel strictement positif.
Soit la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que cette série est simplement convergente.
2. Montrer que cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
3. On suppose $\alpha \leq \frac{1}{2}$ et soit b un réel strictement positif.
   Montrer que cette série est uniformément convergente sur $[b,+\infty[$.

Exercice 2

Etudier la convergence normale et déterminer la somme de la série de terme général $e^{-(n+1)x}\sin x$ sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ avec a un réel strictement positif.

Exercice 3

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ au voisinage de l'origine.

Exercice 4

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière de terme général $n^{(-1)^n}x^n$.

Exercice 5

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière de terme général $n^{(-1)^n}x^n$.

Exercice 6

1. Donner le développement en série de Fourier d'une fonction f paire périodique de période 2π vérifiant $f(x) = \pi - x$ pour tout réel x de $[0;\pi]$.
2. En déduire $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.