Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : U14 Analyse

Examen 1ère session	**2ème semestre**	**2003/2004**
02 juin 2004		**9h30 - 12h30**

Correction

Exercice 1

1. Si $x = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout entier non nul n et donc $\sum_{n\geq 1} u_n(0) = 0$.

   Si $x \neq 0$, alors $u_n(x) \sim_\infty \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$.

   Puisque $\alpha + 1 > 0$, la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ est convergente.

   Donc, pour tout réel non nul x, la série de terme général $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ et, par suite, la série général $u_n(x)$ sont convergentes.

2. Pour tout entier non nul n, on a $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |u_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} u_n(x)$ (en effet, la fonction u_n est impaire).

   La fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout réel x positif, on a :

   $$u_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha} \times \frac{1 + nx^2 - x \times 2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{1}{n^\alpha} \times \frac{1 - nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

   Donc $u_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - nx^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   D'où $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}\, n^\alpha (1+1)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n^{\alpha+1/2}}$.

   Si $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, alors $\alpha + \dfrac{1}{2} \leq 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ diverge et la série $\sum u_n(x)$ ne converge pas uniformément (a fortiori pas normalement) sur $\mathbb{R}$.

   Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, alors $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ converge et la série $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, pour tout réel strictement positif b, il existe un entier naturel n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < b$.

   On a alors $n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = u_n(b) \sim_\infty \dfrac{1}{n^\alpha b} = \dfrac{1}{b} \times \dfrac{1}{n^\alpha}$.

   La série numérique $\sum u_n(b)$ converge et donc la série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[b,+\infty[$.

Exercice 2

$$x > a \;\Rightarrow\; -(n+1)x < -(n+1)a \;\Rightarrow\; e^{-(n+1)x} < e^{-(n+1)x}.$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)x} \sin x = \sin x \sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)x}.$$

$$|S_n(x)| \leq |\sin x| \sum_{k=0}^{n} |e^{-(k+1)x}| \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)a} = \sum_{k=0}^{n} (e^{-a})^{k+1} = \frac{1-(e^{-a})^{n+2}}{1-e^{-a}} \times e^{-a}.$$

Si $a > 0$, alors $-a < 0$ et $e^{-a} < 1$. Donc la série de terme général e^{-a} est convergente.

$S(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x} \sin x = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin x \sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)x} = \lim_{n\to+\infty} \sin x \dfrac{1-e^{-x(n+2)}}{1-e^{-x}} \times e^{-x} = \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$.

Exercice 3

On a $D_f = \mathbb{R}^*$ mais f est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

On pose donc $f(0) = 1$.

On a $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \dfrac{1}{2x^2} \times (1 - \cos 2x)$.

On a $\cos u = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$ avec un rayon de convergence $R = +\infty$.

Donc $\cos 2x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$ et $f(x) = \dfrac{1}{2x^2} \times \left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x)^{2n}\right) = \dfrac{1}{2x^2} \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} 2^{2n} x^{2n}\right)$.

D'où $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} 2^{2n-1} x^{2n-2}$.

Exercice 4

On pose $a_n = n^{(-1)^n}$.

On a $|a_n|^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln a_n} = e^{\frac{(-1)^n}{n}\ln n}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 1$ et le rayon de convergence est donc $R = 1$.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n\geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n\geq 0} (2n)^{(-1)^{2n}} x^{2n} + \sum_{n\geq 0} (2n+1)^{(-1)^{2n+1}} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n\geq 0} (2n) x^{2n} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n\geq 0} 2n\, x^{2n} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1} 2n\, x^{2n} + \operatorname{argth} x \\
&= x \sum_{n\geq 1} 2x\, n\, (x^2)^{n-1} + \operatorname{argth} x \\
&= x \left(\sum_{n\geq 0} (x^2)^n\right)' + \operatorname{argth} x \\
&= x \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' + \operatorname{argth} x \\
&= \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \operatorname{argth} x.
\end{aligned}$$

Exercice 5

On pose $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

On a $y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$$\begin{aligned}
& (1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y'' - x^2 y'' - 4xy' - 2y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n\geq 2}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 1} 4n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2a_2 - 2a_0 + (6a_3 - 4a_1 - 2a_1)x + \sum_{n\geq 2}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 4na_n - 2a_n]x^n = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2a_2 - 2a_0 + (6a_3 - 6a_1)x + \sum_{n\geq 2}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n-1) + 4n + 2]a_n]x^n = 0
\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} 2a_2 - 2a_0 = 0 \\ 6a_3 - 6a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n-1) + 4n + 2]a_n = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_3 = a_1 \\ (n^2 + 3n + 1)a_{n+2} - (n^2 + 3n + 1)a_n = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_3 = a_1 \\ (n^2 + 3n + 1)a_{n+2} - (n^2 + 3n + 1)a_n = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad a_{n+2} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$
$y'(0) = 2 \Rightarrow a_1 = 2$

Donc $y = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n} + \sum\limits_{n\geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum\limits_{n\geq 0} a_0 x^{2n} + \sum\limits_{n\geq 0} a_1 x^{2n+1} = a_0 \sum\limits_{n\geq 0} x^{2n} + a_1 x \sum\limits_{n\geq 0} x^{2n}$
$= \dfrac{a_0}{1-x^2} + \dfrac{a_1 x}{1-x^2} = \dfrac{1+2x}{1-x^2}.$

Exercice 6

1. f est continue sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x-0) = \pm 1$ et $f'(x+0) = \pm 1$.
D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f.

f est paire donc $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi - x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\left[\pi x - \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \dfrac{1}{2}\pi^2\right) = \dfrac{\pi}{2}.$
$a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos kx - x\cos kx\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x - \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x$
$= 2\left[\dfrac{1}{k}\sin kx\right]_0^{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x$

$u = x \qquad v' = \cos kx$
$u' = 1 \qquad v = \dfrac{1}{k}\sin kx$

$a_k = 0 - \dfrac{2}{\pi}\left(\left[x\dfrac{1}{k}\sin kx\right]_0^{\pi} - \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x\right) = -\dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{1}{k}\left[-\dfrac{1}{k}\cos kx\right]_0^{\pi}\right) = -\dfrac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1)$
Donc $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2} \quad \forall p \in \mathbb{N}$.
$f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$

2. $f(0) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2}.$
Donc $\pi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2}.$
C'est-à-dire $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi^2}{8}.$