



**Instructions aux étudiants :**

1. Tous documents interdits
2. L'usage des calculatrices est interdit.

**Exercice 1**

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = n - \sqrt[4]{n^4 - 1}$ .

**Exercice 2**

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$

par  $f_n(x) = \frac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2}$ .

**Exercice 3**

Soit la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$ .

1. Etudier la convergence uniforme de la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Etudier la convergence simple de la série  $\sum g_n$ .
3. Pour tout entier non nul  $n$ , soit  $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

Montrer que  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx_n}{1 + k^3 x_n^2} \geq \frac{\sqrt{n}}{9}$ .

4. En déduire que la série  $\sum g_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .
5. Montrer que la série  $\sum g_n$  converge normalement sur tout intervalle  $[a; +\infty[$  où  $a > 0$ .

**Exercice 4**

Trouver le développement en série entière de  $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x$  au voisinage de l'origine.

**Exercice 5**

Développer en série de Fourier la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; 2-périodique définie par  $\forall x \in [-1; 1], f(x) = |x|$ .