



Correction

Exercice 1

$$u_n = n - n\sqrt[4]{1 - \frac{1}{n^4}} = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^{1/4}\right).$$

Or $(1 - h)^{1/4} = 1 - \frac{1}{4}h + o(h)$.

Donc $u_n = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$
 $= n\left(\frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

D'où $u_n \sim \frac{1}{4n^3}$ et $\sum u_n$ converge.

Exercice 2

Si $x \in]0; \frac{1}{e}[\cup]e; +\infty[$, alors $(\ln x)^2 > 1$ et $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Si $x \in]\frac{1}{e}; e[$, alors $(\ln x)^2 < 1$ et $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.

Si $x = e$, alors $f_n(e) = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$.

Si $x = \frac{1}{e}$, alors $f_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{(-1)^{2n} - 2}{(-1)^{2n} + 2} = -\frac{1}{3}$.

Pour tout entier non nul n , la fonction f_n est continue.

Ce n'est pas le cas de la limite. Donc la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 3

1. # Si $x = 0$, $g_n(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$
Si $x \neq 0$, $g_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
Donc $g_n \xrightarrow{cv\grave{s}} g = 0$.

$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} g_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g_n'(x) = \frac{n(1 + n^3 x^2) - nx(2n^3 x)}{(1 + n^3 x^2)^2} = \frac{n + n^4 x^2 - 2n^4 x^2}{(1 + n^3 x^2)^2} = \frac{n - n^4 x^2}{(1 + n^3 x^2)^2}.$$

$$g_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

$$g_n\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc la convergence est uniforme.

2. Si $x = 0$, $g_n(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$

Si $x \neq 0$, $g_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x}$

Donc la série $\sum g_n$ est convergente.

$$3. \frac{kx_n}{1+k^3x_n^2} = \frac{k \frac{1}{n\sqrt{n}}}{1+k^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{k}{n\sqrt{n}\left(1+k^3\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{kn\sqrt{n}}{n^3+k^3}.$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{kx_n}{1+k^3x_n^2} = n\sqrt{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n^3+k^3} \geq n\sqrt{n} \times n \times \frac{n}{n^3+(2n)^3} = \frac{\sqrt{n}}{9}.$$

4. Le critère de convergence uniforme de Cauchy n'est pas vérifié.

5. Pour n assez grand i.e. $n \geq n_0$, $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \notin [a; +\infty[$.

$$\text{Donc, pour tout entier } p, \left| \sum_{k=n_0}^{n_0+p} g_n(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n_0}^{n_0+p} g_n(a) \right|.$$

Puisque la série (numérique) $\sum g_n(a)$ est convergente, la convergence est normale.

Exercice 4

$$f(x) = (\operatorname{Re}(e^{ix})) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(e^{x(1+i)} + e^{x(-1+i)}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n (1+i)^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^n (-1+i)^n}{n!} \right) \\ = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \operatorname{Re}((1+i)^n + (-1+i)^n)$$

$$\text{Or } (1+i)^n = (\sqrt{2} e^{i\pi/4})^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4} = 2^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\text{et } (-1+i)^n = (\sqrt{2} e^{i3\pi/4})^n = 2^{n/2} e^{i3n\pi/4} = 2^{n/2} \left(\cos \frac{3n\pi}{4} + i \sin \frac{3n\pi}{4} \right)$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}((1+i)^n + (-1+i)^n) = 2^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{3n\pi}{4} \right) = a_n.$$

Si $n \equiv 0[8]$, alors $a_n = 2$.

Si $n \equiv 1[8]$, alors $a_n = 0$.

Si $n \equiv 2[8]$, alors $a_n = 0$.

Si $n \equiv 3[8]$, alors $a_n = 0$.

Si $n \equiv 4[8]$, alors $a_n = -2$.

Si $n \equiv 5[8]$, alors $a_n = 0$.

Si $n \equiv 6[8]$, alors $a_n = 0$.

Si $n \equiv 7[8]$, alors $a_n = 0$.

$$\text{Donc } f(x) = \sum_{p \geq 0} 2(-1)^p \frac{x^{4p}}{(4p)!}.$$

Exercice 5

f est continue donc f est réglée.

On a $f(0^-) = f(0^+) = 0$ et $f(1^-) = f(-1^+) = 1$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+0)$ et $f'(x-0)$ existent.

Donc $S(f) = f$.

Puisque f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout entier n .

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = 1.$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx \\
&= 2 \left[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \, dx \\
&= 2 \left[\frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

Donc si $n = 2p$ avec $p > 0$ alors $a_n = 0$ et si $n = 2p + 1$ alors $a_n = -\frac{4}{n^2\pi^2}$.

$$\text{D'où, } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2p+1)\pi x.$$