Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Mias 2 : UE 8 Algèbre

Examen 1ère session **1er semestre** **2003/2004**
23 janvier 2004 **13h30 - 15h30**

Correction

Exercice 1

Soient $A=\begin{pmatrix}-7&-4&-4\\16&9&8\\-8&-4&-3\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

Le système équivaut à l'équation $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX$ où $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=X'=\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$.

$$\pi_A(X)=\det(A-XI_3)=\begin{vmatrix}-7-X&-4&-4\\16&9-X&8\\-8&-4&-3-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-X&1-X&1-X\\16&9-X&8\\-8&-4&-3-X\end{vmatrix}=(1-X)\begin{vmatrix}1&1&1\\16&9-X&8\\-8&-4&-3-X\end{vmatrix}.$$

$$=(1-X)\begin{vmatrix}1&0&0\\16&-7-X&-8\\-8&4&5-X\end{vmatrix}=(1-X)\begin{vmatrix}-7-X&-8\\4&5-X\end{vmatrix}=(1-X)[(-7-X)(5-X)+32].$$

$$=(1-X)(X^2+2X-3)=(1-X)(X-1)(X+3).$$

$\mathrm{Sp}(A)=\{-3;1\}$ -3 valeur propre simple
1 valeur propre double

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e) est $A=\mathscr{M}_e(f)$.

\# <u>$\lambda=-3$</u>

$$u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f+3\mathrm{Id})\iff\begin{cases}-4x-4y-4z=0\\16x+12y+8z=0\\-8x-4y=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-2x\\z=x\end{cases}.$$

$E_{-3}=\mathrm{Ker}(f+3\mathrm{Id})=<b_1>$ où $b_1=(1;-2;1)$.

\# <u>$\lambda=1$</u>

$$u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})\iff\begin{cases}-8x-4y-4z=0\\16x+8y+8z=0\\-8x-4y-4z=0\end{cases}\iff\{z=-2x-y.$$

$u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \iff u = (x,y,-2x-y) = x(1,0,-2) + y(0,1,-1)$.

$E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \langle b_2,b_3 \rangle$ où $b_2 = (1;0;-2)$ et $b_3 = (0;1;-1)$.

La famille $(b) = (b_1,b_2,b_3)$ est une base.

On a $P = P_{e\to b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \mathscr{M}_b(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $B = P^{-1}AP$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tel que $Y = P^{-1}X$ c'est-à-dire $X = PY$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = P\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$.

$P\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = APY \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = P^{-1}APY \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = BY.$

Donc $\begin{cases} y_1' = -3y_1 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = y_3 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-3x} \\ y_2 = c_2 e^{x} \\ y_3 = c_3 e^{x} \end{cases}$ où c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$.

$X = PY \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} \\ x_2 = -2c_1 e^{-3x} + c_3 e^{x} \\ x_3 = c_1 e^{-3x} - (2c_2 + c_3)e^{x} \end{cases}$ où c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e) de $\mathbb{R}^4$ est A.

$$\det(f - X\,\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2-X & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$
$$= (-1-X)(2-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} = (-1-X)(2-X)(1-X)(2-X)$$
$$= (X+1)(X-1)(X-2)^2.$$

$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{-1;1;2\}$

\# $\underline{\lambda = -1}$ (valeur propre simple)

$u = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \iff \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ 3y + 3t = 0 \\ -x + 3z + 6t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \\ t = -y \end{cases}$

$E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \langle b_1 \rangle$ où $b_1 = (0;1;2;-1)$.

\# $\underline{\lambda = 1}$ (valeur propre simple)

$u = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \iff \begin{cases} -y - t = 0 \\ y + 3t = 0 \\ -x + z + 6t = 0 \\ -2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = x \\ t = 0 \end{cases}$

$E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \langle b_2 \rangle$ où $b_2 = (1;0;1;0)$.

#	$\underline{\lambda = 2}$		(valeur propre double)

$$u = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - t = 0 \\ 3t = 0 \\ -x + 6t = 0 \\ -3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = <b_3>$ où $b_3 = (0;0;1;0) = e_3$.

On a $\dim E_2 = 1$. Donc la dimension de l'espace propre est différente de la multiplicité de la valeur propre : A n'est pas diagonalisable.

On va déterminer une base de Jordan pour f.

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$u = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + t = 0 \\ -9t = 0 \\ x + y - 17t = 0 \\ 9t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ t = 0 \end{cases}$$

$N_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})^2 = <b_3,b_4>$ où $b_3 = (0;0;1;0) = e_3$ et $b_4 = (1;-1;0;0)$.

Soit $g = f - 2\mathrm{Id}$. On a donc $E_2 = \mathrm{Ker}(g)$, $N_2 = \mathrm{Ker}(g^2)$ et $f = g + 2\mathrm{Id}$.

On a $b_4 \in N_2$, $b_4 \notin E_2$ et $g(b_4) \in E_2$.

$g(b_4) = (0;0;-1;0) = -e_3$.

La famille $(g(b_4);b_4)$ est une base de N_2.

$f(b_4) = (g + 2\mathrm{Id})(b_4) = g(b_4) + 2\,b_4$

$f(g(b_4)) = (g + 2\mathrm{Id})(g(b_4)) = g^2(b_4) + 2\,g(b_4) = 2\,g(b_4)$.

Puisque $\mathbb{R}^4 = E_{-1} \oplus E_1 \oplus N_2$, la famille $(b) = (b_1;b_2;g(b_4);b_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

On a : $P = P_{e \to b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \mathscr{M}_b(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc $B = P^{-1}AP$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

D'où $A = PBP^{-1}$ et $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$N^2 = 0$ et donc $N^k = 0$ pour tout entier $k \geq 2$.

On a $B = D + N$ avec $N \times D = 0 = D \times N$ (les matrices D et N commutent).

Donc $\exp(B) = \exp(D) \times \exp(N)$

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ et } \exp(N) = I_4 + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \exp(B) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Enfin, } \exp(A) = P\exp(B)P^{-1} = \begin{pmatrix} e & e-e^2 & 0 & e-e^2 \\ 0 & e^2 & 0 & -e^{-1} \\ e-e^2 & e & e^2 & -2e^{-1}+e+2e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On a $\operatorname{Ker} f^0 = \operatorname{Ker} \mathrm{Id} = \{0\}$.

On doit montrer : *i)* $x \in \operatorname{Ker} f^p \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$ pour tout $0 \leq p \leq q-1$.

ii) $\operatorname{Ker} f^p \neq \operatorname{Ker} f^{p+1}$ pour tout $0 \leq p \leq q-1$.

- $x \in \operatorname{Ker} f^p \Rightarrow f^p(x) = 0 \Rightarrow f(f^p(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^{p+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

- Par l'absurde, on suppose $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ pour un certain $0 \leq p \leq q-1$.
  Soit $x \in \operatorname{Ker} f^{p+2}$, on a $f^{p+2}(x) = 0$ c'est-à-dire $f^{p+1}(f(x)) = 0$.
  Donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$ d'où $f(x) \in \operatorname{Ker} f^p \Rightarrow f^p(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
  Donc $\operatorname{Ker} f^{p+2} \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$ c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f^{p+2} = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
  On montre ainsi par récurrence que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^{p+2} = \ldots = \operatorname{Ker} f^q = E$.
  c'est-à-dire f nilpotente d'ordre inférieur à p : contraire aux hypothèses.