



Correction

Exercice 1

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

Le système équivaut à l'équation  $\frac{dX}{dt} = AX$  où  $\frac{dX}{dt} = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \pi_A(X) = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 8 & 4 & -3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 2 & -1-X & 1-X \\ 8 & 4 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 2 & -1-X & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -6 & -5-X & 0 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -6 & -5-X \end{vmatrix} = (1-X)[(-X)(-5-X) + 6]. \\ &= (1-X)(X^2 + 5X + 6) = (1-X)(X+2)(X+3). \end{aligned}$$

$\text{Sp}(A) = \{-3; -2; 1\}$

Les réels  $-3; -2; 1$  sont des valeurs propres simples de  $A$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $(e)$  est  $A = \mathcal{M}_e(f)$ .

#  $\lambda = -3$

$$u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 8x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}.$$

$E_{-3} = \text{Ker}(f + 3\text{Id}) = \langle b_1 \rangle$  où  $b_1 = (1; -2; 1)$ .

#  $\lambda = -2$

$$u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 8x + 4y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}.$$

$E_{-2} = \text{Ker}(f + 2\text{Id}) = \langle b_2 \rangle$  où  $b_2 = (1; -2; 0)$ .

#  $\lambda = 1$

$$u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + 4y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}.$$

$$E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}) = \langle b_3 \rangle \text{ où } b_3 = (0; 1; 1).$$

La famille  $(b) = (b_1, b_2, b_3)$  est une base.

$$\text{On a } P = P_{e \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \mathcal{M}_b(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } B = P^{-1}AP \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ tel que } Y = P^{-1}X \text{ c'est-à-dire } X = PY. \text{ Donc } \frac{dX}{dt} = P \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}.$$

$$P \frac{dY}{dt} = APY \Rightarrow \frac{dY}{dt} = P^{-1}APY \Rightarrow \frac{dY}{dt} = BY.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} y_1' = -3y_1 \\ y_2' = -2y_2 \\ y_3' = y_3 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} y_1 = c_1 e^{-3x} \\ y_2 = c_2 e^{-2x} \\ y_3 = c_3 e^x \end{cases} \text{ où } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$X = PY \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} \\ x_2 = -2c_1 e^{-3x} - 2c_2 e^{-2x} + c_3 e^x \\ x_3 = c_1 e^{-3x} + c_3 e^x \end{cases} \text{ où } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

## Exercice 2

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique  $(e)$  de  $\mathbb{R}^4$  est  $A$ .

$$\begin{aligned} \det(f - X\text{Id}) &= \begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1-X & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X) \begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)(2-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (-1-X)(2-X)[(3-X)(1-X) + 1] \\ &= (X+1)(X-2)[X^2 - 4X + 4] = (X+1)(X-2)^3. \end{aligned}$$

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{-1; 2\}$$

#  $\lambda = -1$  (valeur propre simple)

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f + \text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - z - t = 0 \\ 3y + 3t = 0 \\ x + 2y + 2z + 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \\ t = -y \end{cases}$$

$$E_{-1} = \text{Ker}(f + \text{Id}) = \langle b_1 \rangle \text{ où } b_1 = (0; 1; 2; -1).$$

#  $\lambda = 2$  (valeur propre triple)

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ \phantom{x + y - z - t} 3t = 0 \\ x + 2y - z + 6t = 0 \\ \phantom{x + 2y - z + 6t} -3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$E_2 = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \langle b_2 \rangle \text{ où } b_2 = (1; 0; 1; 0).$$

On a  $\dim E_2 = 1 \neq 3$ .

Donc la dimension de l'espace propre est différente de la multiplicité de la valeur propre :  $A$  n'est pas diagonalisable.

On va déterminer une base de Jordan pour  $f$ .

$$(A - 2I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (A - 2I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & -162 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})^3 \Leftrightarrow t = 0$$

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$N_2 = \text{Ker}(f - 2\text{Id})^3 = \langle b_2, b_3, b_4 \rangle \text{ où } b_3 = (1; 0; 0; 0) = e_1 \text{ et } b_4 = (0; 1; 0; 0) = e_2.$$

On cherche  $a_1 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})^3$  tel que  $a_1 \notin \text{Ker}(f - 2\text{Id})^2$ .

Par exemple,  $a_1 = e_2 = b_4 = (0; 1; 0; 0)$ .

Soit  $g = f - 2\text{Id}$  i.e.  $f = g + 2\text{Id}$ .

On a donc  $E_2 = \text{Ker}(g)$ ,  $N_2 = \text{Ker}(g^2)$  et  $f = g + 2\text{Id}$ .

$$g(a_1) = (1; 0; 2; 0) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})^2 \text{ et } g^2(a_1) = (-1; 0; -1; 0) = -b_2 \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

La famille  $(g^2(a_1); g(a_1); a_1)$  est une base de  $N_2$ .

$$f(a_1) = (g + 2\text{Id})(a_1) = g(a_1) + 2a_1$$

$$f(g(a_1)) = (g + 2\text{Id})(g(a_1)) = g^2(a_1) + 2g(a_1).$$

$$f(g^2(a_1)) = (g + 2\text{Id})(g^2(a_1)) = g^3(a_1) + 2g^2(a_1) = 2g^2(a_1).$$

Puisque  $\mathbb{R}^4 = E_{-1} \oplus N_2$ , la famille  $(b) = (b_1; g^2(a_1); g(a_1); a_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

$$\text{On a : } P = P_{e \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \mathcal{M}_b(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } B = P^{-1}AP \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où  $A = PBP^{-1}$  et  $\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$ .

$$\text{On pose } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $N^3 = 0$  et donc  $N^k = 0$  pour tout entier  $k \geq 3$ .

On a  $B = D + N$  avec  $N \times D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D \times N$  (les matrices  $D$  et  $N$  commutent).

Donc  $\exp(B) = \exp(D) \times \exp(N)$

$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$  et  $\exp(N) = I_4 + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc  $\exp(B) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^1 & \frac{1}{2}e^2 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$ .

Enfin,  $\exp(A) = P \exp(B) P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4e^2 & e^2 & -2e^2 & 3e^2 \\ 0 & 2e^2 & 0 & -2e^{-1} + 2e^2 \\ 2e^2 & 3e^2 & 0 & -4e^{-1} + 3e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$ .

### Exercice 3

On suppose  $f \circ g = g \circ f$ .

- Soit  $x \in \text{Ker } f$  c'est-à-dire  $f(x) = 0$ . On veut montrer que  $g(x) \in \text{Ker } f$ .  
 $f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ .
- $y \in \text{Im } f$  c'est-à-dire  $\exists x \in E / y = f(x)$ . On veut montrer que  $g(y) \in \text{Im } f$ .  
 $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$  avec  $g(x) \in E$ .  
Donc  $g(y)$  est l'image par  $f$  d'un élément de  $E$ .