Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Sm 1 : U6

Examen 1ère Session | **2ème semestre** | **2003/2004**
01 juin 2004 | | **10h00 - 12h00**

Correction

Exercice 1

C'est une équation (non linéaire) homogène.

On pose $y = tx$ et on obtient $y' = t'x + t$.

D'où $3x\,tx\,(t'x + t) = x^2 + 4(tx)^2$

$\Leftrightarrow 3x^3 tt' + 3x^2 t^2 = x^2 + 4x^2 t^2$

$\Leftrightarrow 3x\,tt' = 1 + t^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{3tt'}{1+t^2} = \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{3}{2}\ln(1+t^2)\right]' = [\ln x]'$

$\Leftrightarrow \ln(1+t^2) = \dfrac{2}{3}\ln x + c$ où $c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1 + t^2 = e^{\ln \sqrt[3]{x^2} + c}$ où $c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow t^2 = k\sqrt[3]{x^2} - 1$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow$ $t = \pm\sqrt{k\sqrt[3]{x^2} - 1}$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Enfin $y = \pm x\sqrt{k\sqrt[3]{x^2} - 1}$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

C'est une équation de Bernouilli.

Remarque : $y = 0$ est solution.

On pose $u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$. On a donc $y = u^2$ et $y' = 2u'u$ et l'équation devient : $2u'u = u^2 + xu$.

Si $u = 0$, on retrouve $y = 0$.

Si $u \neq 0$, sur tout intervalle où u ne s'annule pas, on a alors $2u' = u + x$ c'est-à-dire $u' - \dfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{2}x$.

C'est une équation linéaire en u qui se résout en trois étapes.

\# *Equation sans second membre.*

Une primitive de $\dfrac{1}{2}$ est $\dfrac{1}{2}x$.

Les solutions de l'équation sans second membre sont donc $u = \lambda e^{\frac{1}{2}x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

\# *Solution particulière.*

On cherche une solution particulière de la forme $u_0 = ax + b$.
On a $u_0' = a$ et $-\frac{1}{2}ax + a - \frac{b}{2} = u' - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}x$.
Donc $\begin{cases} a = -1 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$. On obtient $u_0 = -x - 2$.

\# *Equation avec second membre.*

Les solutions de l'équation avec second membre sont donc $u = \lambda e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où $y = u^2 = (\lambda e^{\frac{1}{2}x} - x - 2)^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On a $y = xy' - \sqrt{y' + 4}$.

C'est une équation de Clairaut.

On pose $y' = t$ et on obtient $y = xt - \sqrt{t+4}$.
Donc $y' = t + xt' - \frac{t'}{2\sqrt{t+4}}$.
Puisque $t = y'$, on a $xt' - \frac{t'}{2\sqrt{t+4}} = 0$ et enfin $t'\left(x - \frac{1}{2\sqrt{t+4}}\right) = 0$.

Si $t' = 0$, alors $t = c \in \mathbb{R}$ et $y = cx - \sqrt{c+4}$.

Si $t' \neq 0$, alors, sur tout intervalle où t ne s'annule pas, on a $x - \frac{1}{2\sqrt{t+4}} = 0$ c'est-à-dire $t = \frac{1}{4x^2} - 4$.
D'où $y = xt - \sqrt{t+4} = \frac{1}{4x} - 4x - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{4x} - 4x$.

Exercice 4

On se place dans une repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthogonal. On appelle Γ la courbe.
La courbe Γ est définie sur $\mathbb{R}$.

x est 2π-périodique et y est 2π-périodique donc il en est de même de Γ.
On peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à un intervalle de longueur 2π.
On prend $E_1 = [-\pi;\pi]$.

E_1 est symétrique par rapport à l'origine.
x est paire et y est impaire ($\forall t \in E_1$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$).
$M(-t)$ est obtenu à partir de $M(t)$ par la symétrie d'axe Ox.
On peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $E_1 \cap \mathbb{R}_+$ ou $E_1 \cap \mathbb{R}_-$. On prend $E_2 = [0;\pi]$.

E_2 est symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$.
$\forall t \in E_2$, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$.
$M(\pi - t)$ est obtenu à partir de $M(t)$ par la symétrie d'axe Oy.
On peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $E_2 \cap \left]-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$ ou $E_2 \cap \left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$. On prend $E_3 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

E_3 est symétrique par rapport à $\frac{\pi}{4}$.

$\forall t \in E_2$, $x\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3t\right) = 3\sin t + 2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-3t\right) = 3\sin t - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$

$= 3\sin t - 2\sin 3t = y(t)$

et $y\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3t\right) = 3\cos t + 2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-3t\right) = 3\cos t - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$

$= 3\cos t + 2\cos 3t = x(t)$

$M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ est obtenu à partir de $M(t)$ par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

On peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $E_3 \cap \left]-\infty; \frac{\pi}{4}\right]$ ou $E_3 \cap \left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right[$. On prend $E_4 = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Il n'y a pas de formule intéressante pour $x\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$ et $y\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$.

On prend donc pour intervalle d'étude $E_4 = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 5

On munit le plan euclidien d'une repère orthogonale $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Pour h proche de 0, on a :

$\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)$ et $\sin h = h - \frac{1}{6}h^3 + o(h^4)$.

D'où $x(h) = h^2\left(1 - \frac{1}{2}h^2 - 2h\right) + o(h^4) = h^2 - 2h^3 - \frac{1}{2}h^4 + h^4\varepsilon_1(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0$

et $y(h) = 3 - 2\left(1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4\right) - 2h^3 + o(h^4) = 1 + h^2 - 2h^3 - \frac{1}{12}h^4 + h^4\varepsilon_2(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0$

D'où $\begin{pmatrix} x(h) \\ y(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h^3\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + h^4\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/12 \end{pmatrix} + h^4\begin{pmatrix} \varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_2(h) \end{pmatrix}$.

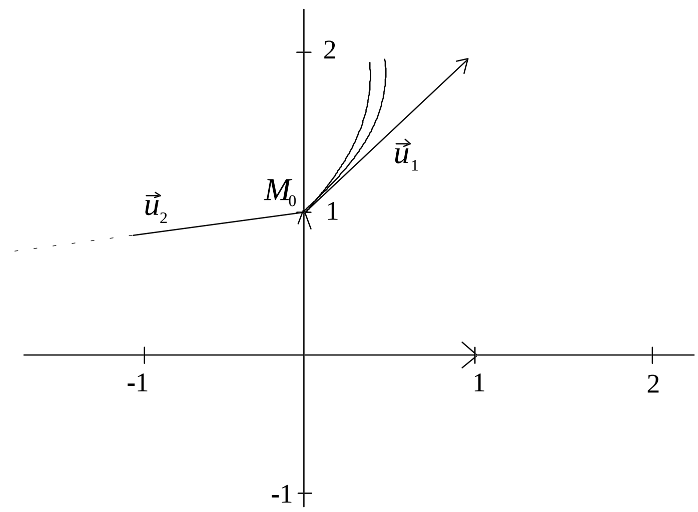
Le point M_0 (= $M(0)$) a pour coordonnées (0;1) dans $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs de coordonnées respectives (1;1) et (–6;–1) dans $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Soit $\vec{\varepsilon}(h)$ le vecteur de coordonnées $(\varepsilon_1(h);\varepsilon_2(h))$ dans $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

On a $\overrightarrow{M_0M} = (h^2 - 2h^3)\vec{u}_1 + \frac{h^4}{12}\vec{u}_2 + h^4\vec{\varepsilon}(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$

Le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ se comporte localement comme $h^2\vec{u}_1 + h^4\vec{u}_2$: le point M_0 est un point de rebroussement de seconde espèce.



Exercice 6

$D_\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

On suppose $a,b \in D_\Gamma$ avec $a \neq b$.

$$
\begin{aligned}
M(a) = M(b) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(a) = x(b) \\ y(a) = y(b) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{a} - a^2 = \dfrac{1}{b} - b^2 \\ \dfrac{a^2}{a+1} = \dfrac{b^2}{b+1} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + b^2 - a^2 = 0 \\ a^2 \times (b+1) = b^2 \times (a+1) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{b-a}{ab} + (b-a)(b+a) = 0 \\ a^2 b - b^2 a + a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (b-a)\left[\dfrac{1}{ab} + (b+a)\right] = 0 \\ (a-b)ab + (a-b)(a+b) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{ab} + (b+a) = 0 \\ (a-b)[ab + (a+b)] = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{ab} + (b+a) = 0 \\ ab + (a+b) = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

On pose $S = a + b$ et $P = ab$.

Les réels a et b sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

$$
\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{P} + S = 0 \\ P + S = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P - \dfrac{1}{P} = 0 \\ S = -P \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P^2 - 1 = 0 \\ S = -P \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si $P = 1$ alors $S = -1$ et l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Si $P = -1$ alors $S = 1$.

L'équation $X^2 - X - 1 = 0$ possède deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On a $\{a;b\} = \{X_1;X_2\}$.