



Correction

Exercice 1

1. • $\det M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (2 \times 3 - 5 \times 1) = 2 \times 1 = 2 \neq 0.$

Donc M est inversible.

• $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_3 - 3L_1 \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_2 - 4L_3)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D'où $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1/2 & -7/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

2. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Le système est équivalent à l'égalité matricielle $MX = B.$

Donc $X = M^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & -7 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

D'où $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3/2 \\ z = 1 \end{cases}$ et $S = \{(-1; \frac{3}{2}; 1)\}.$

Exercice 2

$$J_f = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |J_f| &= \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} \\ &= y \times \begin{vmatrix} 0 & x \\ z & y \end{vmatrix} - x \times \begin{vmatrix} z & x \\ 0 & y \end{vmatrix} \\ &= -xyz - xyz = -2xyz \end{aligned}$$

Exercice 3

On pose $x = 1 + h$ i.e. $h = x - 1$.

On a x proche de 1 si et seulement si h est proche de 0.

$$\text{De plus, } \frac{e^x \ln x}{x^2} = \frac{e^{1+h} \ln(1+h)}{(1+h)^2} = e^1 \times e^h \times (1+h)^{-2} \times \ln(1+h).$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } e^h &= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3) \\ (1+h)^{-2} &= 1 - 2h + 3h^2 + 4h^3 + o(h^3) \\ \ln(1+h) &= h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } e^h \times (1+h)^{-2} \times \ln(1+h) &= h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - 2h^2 + h^3 + 3h^3 + h^2 - \frac{1}{2}h^2 - 2h^3 + \frac{1}{2}h^3 + o(h^3) \\ &= h - 2h^2 + \frac{17}{6}h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

$$\text{Et } \frac{e^x \ln x}{x^2} = e(x-1) - 2e(x-1)^2 + \frac{17e}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Exercice 4

C'est une équation non linéaire homogène.

On pose $y = tx$ donc $y' = t'x + t$

On obtient $x^2(t'x + t) = x^2 + t^2x^2 - tx^2$ c'est-à-dire $t'x + t = 1 + t^2 - t$ ou encore $t'x = (1-t)^2$.

Si $t = 1$, alors $y = x$.

$$\begin{aligned} \text{Si } t \neq 1, \text{ alors } \frac{t'}{(1-t)^2} &= \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-t} \right)' &= (\ln|x|)' \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1-t} &= \ln x + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1-t} &= \ln kx \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \\ \Leftrightarrow t &= 1 - \frac{1}{\ln kx} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

$$\text{Donc } y = x - \frac{x}{\ln kx} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 5

C'est une équation de Bernoulli.

Remarque : $y = 0$ est une solution particulière.

On a $\alpha = 2$ et on pose $u = y^{1-\alpha} = y^{-1} = \frac{1}{y}$.

Donc $y = \frac{1}{u}$ et $u' = -\frac{y'}{y^2}$.

Sur tout intervalle où y ne s'annule pas, l'équation devient : $x^2 \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} + 1 = 0$

C'est-à-dire $-x^2 u' + u + 1 = 0$: c'est une équation linéaire premier ordre en u .

Equation sans second membre : $u' - \frac{1}{x^2}u = 0$

Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$.

La solution générale est donc $u = k e^{-\frac{1}{x}}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Solution particulière

$$u = -1.$$

Equation avec second membre

$$u = k e^{-\frac{1}{x}} - 1 \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

D'où $y = \frac{1}{k e^{-\frac{1}{x}} - 1}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

1. $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-15) = 121 = 11^2$

$$X_1 = \frac{1-11}{4} = -\frac{5}{2}.$$

$$X_2 = \frac{1+11}{4} = 3$$

Donc $2x^2 - x - 15 = (2x+5)(x-3)$.

Et $\frac{6-x}{2x^2-x-15} = \frac{6-x}{(2x+5)(x-3)} = \frac{a}{2x+5} + \frac{b}{x-3}$

$\times(2x+5)$ puis $x = -\frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{6+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-3} = \frac{12+5}{-5-6} = -\frac{17}{11}$.

$\times(x-3)$ puis $x = 3 \Rightarrow b = \frac{6-3}{2 \times 3 - 5} = \frac{3}{11}$.

Donc $f(x) = -\frac{17}{11(2x+5)} + \frac{3}{11(x-3)}$.

2. $\int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{17}{11} \times \frac{1}{2} \ln|2x+5| + \frac{3}{11} \ln|x-3| \right]_0^1 = \frac{17}{11} \times \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 7) + \frac{3}{11} (\ln 2 - \ln 3)$.