Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles

1. Notions générales.

Définition

On appelle fonction numérique de n ($\in \mathbb{N}^*$) variables réelles toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On a : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x_1,x_2,......,x_n) \mapsto f(x_1,x_2,......,x_n) = u.$$

Exemples

- $f(x) = 3x + 5$
- $f(x,y) = 2x + 3y$
- $f(x,y,z) = \cos(xyz)$

Remarque

Les fonctions (vectorielles) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ peuvent être considérées comme les données de p fonctions numériques de n variables.

On a, par exemple, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$M \mapsto (f_1(M), f_2(M),......... , f_p(M))$$

avec $f_1,f_2,......,f_p$ des fonctions numériques de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Définition

Soit f une fonction de n variables réelles.

On appelle ensemble de définition de f et on note D_f l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(M)$ existe.

Remarque

Si f est une fonction vectorielle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par $f = (f_1,f_2,......,f_p)$ avec $f_1,f_2,......,f_p$ des fonctions numériques de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'ensemble de définition de f est l'intersection des ensembles de définition des f_i.

Exemples

- $f(x,y,z) = x + y + z$ $\quad D_f = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
- $f(x,y) = x / y$ $\quad D_f = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$
- $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\quad D_f = \{M(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;/\; x^2 + y^2 \leq 1\}$

  D_f = Disque fermé de centre O et de rayon 1.
- $f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} ; \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\right)$

  $D_f = \{M(x,y,z)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;/\; (x,y,z) \neq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Définition

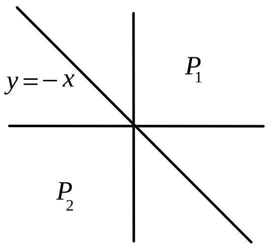
Soit f une fonction numérique de 2 variables réelles.
Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de D l'ensemble de définition de f ou de sa frontière.
On dit que $f(x,y)$ a pour limite l quand (x,y) tend vers (x_0, y_0) et on note $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ si et seulement si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ / \ |x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$.

Remarque

Les théorèmes sur les sommes et produits de limites sont utilisables de la même façon que sur $\mathbb{R}$.

Exemples

- Soit $f(x,y) = x + y$ et $M_0(1;1)$.
  $D_f = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et on a : $\lim\limits_{(x,y)\to M_0} f(x,y) = 2$
- Soit $f(x,y) = 1 / (x + y)$ et $M_0(0;0)$.
  $D_f = \{M(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ / \ x + y \neq 0\}$
  Si $M \in P_1$, alors $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand M tend vers M_0
  Si $M \in P_2$, alors $f(x,y)$ tend vers $-\infty$ quand M tend vers M_0



Définition

Soit f une fonction numérique de 2 variables réelles.

- Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de D l'ensemble de définition de f.
  On dit que f est continue en M_0 si et seulement si $f(M)$ tend vers $f(M_0)$ quand M tend vers M_0.
- f est dite continue sur $I \subset D_f$ si et seulement si f est continue en tout point de I.

Exemple

On veut vérifier la continuité de la fonction suivante: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq 0 \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0;0) \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus \{(0;0)\}$ car c'est la composée de fonctions continues.
Problème en (0;0).
Si $x = y$, on a $f(x,x) = 2$ et donc $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 2$.
Si $x = 0$, on a $f(0,y) = 1$ et donc $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = 1$.
Donc f n'est pas continue en 0.

2. Dérivées partielles.

Définition

Soit f une fonction numérique de $n(\in \mathbb{N}^*)$ variables réelles et soit $i \in \{1,2,.....,n\}$.
Soit $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D_f$.
On appelle dérivée partielle d'indice i de f au point a le nombre dérivé en a_i (s'il existe) de l'application

$$\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$$

Ce nombre dérivé est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$ ou $D_i f(a)$.

Remarque

Pour $n = 3$, soit f une fonction numérique de 3 variables réelles.
Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de D_f l'ensemble de définition de f.

On a : $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y\,x^2 / (y^2 + x^4)$ et $f(0,0) = 0$

- f n'est pas continue en (0,0). En effet, pour tout réel x, $f(x,x^2) = 1/2$
- f admet des dérivées partielles suivant x et y en (0,0).
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

Définition

Si une fonction f numérique de 3 variables réelles admet des dérivées partielles en tout point d'un domaine $I \subset D_f$, ses dérivées partielles sont des fonctions définies sur I c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} ; \\ a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)\end{array} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} ; \\ a \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)\end{array} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} ; \\ a \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(a)\end{array}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 z \arctan\left(\frac{y}{z}\right)$

On a : $$\frac{\partial f}{\partial x}=2xz\arctan\left(\frac{y}{z}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2z\times\frac{1}{z}\times\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{x^2z^2}{y^2+z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^2\arctan\left(\frac{y}{z}\right)+x^2z\left(-\frac{y}{z^2}\right)\frac{1}{1+\frac{y^2}{z^2}}.$$

Définition

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par $f : M \mapsto (f_1(M), f_2(M),\ldots\ldots\ldots , f_p(M))$
où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $i = 1,p$.

On appelle matrice jacobienne de f et on note J_f la matrice $p\times n$: $$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Si $n = p$, le jacobien de f est le déterminant : $$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$
La matrice jacobienne de f est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et le jacobien de f est $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.

Définition

Soit f une fonction numérique de $n(\in \mathbb{N}^*)$ variables réelles et soient $i,j \in \{1, 2,....., n\}$.
On définit les dérivées partielles d'ordre 2 par $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$.

Remarque

On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x\cos y + z\sin y$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + z\cos y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = -x\cos y - z\sin y$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = \sin y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \cos y$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$

Remarque

On peut définir par récurrence les dérivées partielles d'ordre n.
Par exemple, $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y \partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right)\right)\right)\right)$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^4\cos y + \ln z$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^4\sin y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4x^3\sin y$ $\qquad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -12x^2\sin y$

Théorème (De Schwarz)

Soit f une fonction numérique de n variables réelles différentiable (ou dont les dérivées sont continues).
La dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$ où $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = k$, si elle existe, ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les dérivation par rapport aux x_i.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^4\cos y + \ln z$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3\cos y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2\cos y$ $\qquad \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = -12x^2\sin y$