Chapitre 4 : Fonctions numériques, généralités

F. Wlazinski

26th September 2003

1 Opérations sur $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$

Les fonctions numériques sont les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur une partie D_f de $\mathbb{R}$ appelée *domaine de définition* de f.
L'ensemble D_f est le plus souvent une réunion d'intervalles d'intérieur non vide.
Par exemple, le domaine de définition de l'application *tangente* est la réunion des intervalles $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, pour tout entier relatif k.
L'étude d'une telle fonction f doit cependant s'effectuer *intervalle par intervalle.*

C'est pourquoi, dans ce chapitre, on se limitera à des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On note $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^I$, l'ensemble des applications $f\ : I \to \mathbb{R}$.

On définit l'égalité par : $\forall f, g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R}), \quad f = g \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On définit les applications $f+g$ et fg de la manière suivante :
$\forall x \in I,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x)g(x)$

Muni de ces deux lois $+$ et $\times$, $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ a une structure d'anneau commutatif. En particulier, on a :
• L'élément neutre pour la loi $+$ est l'application constante $x \mapsto 0$.
• Le symétrique pour la loi $+$ d'une application f est l'application, noté $-f$, appelée opposée de f et définie par: $\forall x \in I,\ (-f)(x) = -f(x)$.
• L'élément neutre pour la loi $\times$ est l'application constante $x \mapsto 1$.
• Une application f admet un symétrique appelé inverse pour la loi $\times$ ssi elle ne prend jamais la valeur 0 (ssi elle ne s'annule jamais).
Son inverse est alors noté $\frac{1}{f}$ (mais parfois aussi f^{-1}) et est défini par : $\forall x \in I,\ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note aussi α l'application constante $x \mapsto \alpha$. c'est-à-dire $\alpha(x) = \alpha$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La notation $\alpha.f$ désigne l'application définie par : $\forall x \in I,\ (\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$ (c'est aussi le produit de f par l'application constante α).

Muni de ces deux lois $+$ et ., $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ a une structure de $\mathbb{R}$-e.v.

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$

Définition 2.1

Soient $f, g \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est inférieure ou égale à g et on note $f \leq g$ si et seulement si $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.
On définit ainsi une relation d'ordre *partiel* sur $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
On note comme d'habitude $f \geq g \Leftrightarrow g \leq f$.

Définition 2.2

Soient f et g dans $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
On définit les applications $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ de la manière suivante :
$\forall x \in I,\ \inf(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$
$\forall x \in I,\ \sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$

Propriétés 2.3

f, g et h désignent ici trois applications quelconques de I dans $\mathbb{R}$.
- $\inf(f, g) = f \ \Leftrightarrow\ f \leq g \ \Leftrightarrow\ \sup(f, g) = g$.
- $\inf(f + h, g + h) = \inf(f, g) + h$ et $\sup(f + h, g + h) = \sup(f, g) + h$
- Si $\alpha > 0$, $\quad \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f, g)$ et $\sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f, g)$

Si $\alpha < 0$, $\quad \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f, g)$ et $\sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f, g)$
En particulier, on a $\quad \inf(-f, -g) = -\sup(f, g)$ et $\sup(-f, -g) = -\inf(f, g)$
- $\inf(f, g) \leq f \leq \sup(f, g)$ et $\inf(f, g) \leq g \leq \sup(f, g)$

$(h \leq f$ et $h \leq g) \ \Leftrightarrow\ h \leq \inf(f, g)$ et $(h \geq f$ et $h \geq g) \ \Leftrightarrow\ h \geq \sup(f, g)$
Autrement dit, dans $(\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ muni de la relation d'ordre $\leq$:
$\inf(f, g)$ est le plus grand des minorants (la *borne inférieure*) de la paire $\{f, g\}$.
$\sup(f, g)$ est le plus petit des majorants (la *borne supérieure*) de la paire $\{f, g\}$.
- Les opérations inf et sup sont des lois de composition associatives sur $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

On peut donc généraliser les notations précédentes et définir les applications $\inf(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\sup(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Définition 2.4

Soit f un élément de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
On définit les applications $|f|$, f^+ et f^- de la façon suivante :
- $\forall x \in I,\ |f|(x) = |f(x)|$.
- $\forall x \in I,\ f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$
- $\forall x \in I, f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) > 0 \end{cases}$

Propriétés 2.5

- Une définition équivalente de f^+ et de f^- est : $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$
- Les applications f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- On vérifie les égalités : $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$

On en déduit $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f| + f)$ et $f^- = \dfrac{1}{2}(|f| - f)$
- Plus généralement :

$\forall (f, g) \in \mathcal{A}(I, \mathbb{R}),\ \sup(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ et $\inf(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g - |f - g|)$

3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 3.1

Soit f un élément de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est *majorée* s'il existe un réel β tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq \beta$.
Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
On note alors $\sup_I f$, ou $\sup_{x \in I} f(x)$ la borne supérieure de l'ensemble image $f(I)$.
On dit que cette quantité est la borne supérieure de f sur l'intervalle I.

Définition 3.2

Soit f un élément de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est *minorée* s'il existe un réel α tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \geq \alpha$.

Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.
On note alors $\inf_I f$, ou $\inf_{x\in I} f(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $f(I)$.
On dit que cette quantité est la borne inférieure de f sur l'intervalle I.

Définition 3.3

Soit f un élément de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *bornée* si f est majorée et minorée.
f est donc bornée s'il existe deux réels α et β tels que : $\forall x \in I,\ \alpha \leq f(x) \leq \beta$.

Définition 3.4

Soit f un élément de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit J un sous-intervalle de I, d'intérieur non vide.
On dit que f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) sur J si la restriction de f à J est majorée (resp. minorée, resp. bornée).
Bien sûr, si f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) sur I, elle l'est sur J et on a : $\inf_{x\in I} f(x) \leq \inf_{x\in J\subset I} f(x)$ et $\sup_{x\in I} f(x) \geq \sup_{x\in J\subset I} f(x)$

Remarques 3.5

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
• f est bornée ssi $|f|$ est majorée.
• Si f et g sont majorées, alors $f + g$ est majorée et $\sup_I(f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g$.
Attention : la réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que $f + g$ est majorée que f et g le sont. Par exemple, $f(x) = -x + \sin x$ et $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.
Si f et g sont minorées, alors $f + g$ est minorée et $\inf_I(f + g) \geq \inf_I f + \inf_I g$.
De même, la réciproque est fausse.
• f majorée (resp. minorée) ssi $-f$ minorée (resp. majorée).
On a alors : $\inf_I(-f) = -\sup_I f$, et $\sup_I(-f) = -\inf_I f$.
• Soit α un réel strictement positif.
Si f est majorée alors αf est majorée et $\sup_I(\alpha f) = \alpha \sup_I f$.
De même, si f est minorée alors αf est minorée et $\inf_I(\alpha f) = \alpha \inf_I f$.
• Si f et g sont bornées, alors : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est bornée.
En effet, si $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq A$ et $|g(x)| \leq B$, alors :
$\forall x \in I,\ |(\alpha f + \beta g)(x)| \leq |\alpha|A + |\beta|B$.

4 Extremums absolus (ou globaux)

Définition 4.1

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f présente un *maximum absolu* (ou *global*) au point x_0 de I si : $\forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$.
On dit que f présente un *minimum absolu* (ou *global*) au point x_1 de I si : $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_1)$.
On dit que f présente un *extrémum absolu* en un point I si elle y présente un maximum ou un minimum absolu.

Remarques 4.2

• f présente un maximum absolu en x_0 ssi f est majorée sur I et $f(x_0) = \sup_I f$.
On exprime cela en disant que la borne inférieure de f sur I est *atteinte* en x_0.
On peut alors noter $f(x_0) = \max_I f$ plutôt que $f(x_0) = \sup_I f$.
• De même, f a un minimum absolu en $x_1 \Leftrightarrow f$ est minorée sur I et $f(x_1) = \inf_I f$.
On dit alors que f atteint sa borne inférieure en x_1 et on note $f(x_1) = \min_I f$.

Définition 4.3

Soit f appartenant à $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.
On dit que f présente un *maximum local* en a si :

$\exists\varepsilon > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\varepsilon,\ a+\varepsilon], f(x) \leq f(a)$.
($\Leftrightarrow$ au voisinage de a, f prend des valeurs toutes inférieures ou égales à $f(a)$)

Définition 4.4

Soit f appartenant à $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.
De même on dit que f présente un *minimum local* en a si :
$\exists\varepsilon > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon],\ f(x) \geq f(a)$.

Remarques 4.5

• On dit que f présente un *extrémum local* en a si elle y présente un minimum ou un maximum local.
• Un extrémum global (absolu) est bien sûr un extrémum local. La réciproque est fausse.

5 Applications monotones

Définition 5.1

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On dit que f est :
• *croissante* si : $\forall(x,y) \in I^2,\ x \leq y\ \Rightarrow\ f(x) \leq f(y)$.
décroissante si : $\forall(x,y) \in I^2,\ x \leq y\ \Rightarrow\ f(x) \geq f(y)$.
• *strictement croissante* si : $\forall(x,y) \in I^2,\ x < y\ \Rightarrow\ f(x) < f(y)$.
strictement décroissante si : $\forall(x,y) \in I^2,\ x < y\ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$.
• *monotone* si f est croissante ou décroissante.
strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques 5.2

• Seules les applications constantes sont à la fois croissantes et décroissantes.
• Pour exprimer qu'une application f n'est pas monotone, on peut écrire :
$\exists(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq : $z \in [x,y]$ mais $f(z) \notin [f(x), f(y)]$.
• Soit f une application monotone. Dire que f n'est pas strictement monotone équivaut à dire qu'il existe un segment $[a,b]$ inclus dans I (avec $a < b$) sur lequel f garde une valeur constante.

Propriété 5.3

Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.
Si f et g ont même monotonie, alors $f+g$ est monotone de même monotonie.
Si de plus f ou g est strictement monotone, alors $f+g$ est strictement monotone.

Propriétés 5.4

Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.
• Si f et g sont positives croissantes, fg est positive croissante.
Si f et g sont positives décroissantes, fg est positive décroissante.
• Si f et g sont négatives croissantes, fg est positive décroissante.
Si f et g sont négatives décroissantes, fg est positive croissante.
• Si f est positive croissante et g négative décroissante, fg est négative décroissante.
Si f est positive décroissante et g négative croissante, fg est négative croissante.

Remarques 5.5

• Dans les cas autres que ceux énumérés ci-dessus, on ne peut rien dire.
• Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
Si $\alpha \geq 0$, αf et f ont la même monotonie.
Si $\alpha \leq 0$, αf et f sont de monotonies contraires.
En particulier, $-f$ et f sont de monotonies contraires.

Propriété 5.6

Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f ne s'annule pas sur I, et qu'elle garde un signe constant.
Alors $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur I, de monotonie contraire à celle de f.

Propriétés 5.7

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, telle que $f(I)$ soit inclus dans J.
Soit g une application de J dans $\mathbb{R}$. L'application $g \circ f$ est donc définie sur I.
- Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Les deux propriétés précédentes restent vraies pour des monotonies strictes.

6 Applications paires ou impaires

On considère ici des applications définies sur une partie D_f de $\mathbb{R}$.
On suppose que l'ensemble D_f est symétrique par rapport à 0 ($x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$).
Le cas le plus courant est celui d'un intervalle de centre 0, et notamment $D_f = \mathbb{R}$.

Définition 6.1

On dit que f est *paire* si : $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.
On dit que f est *impaire* si : $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.

Propriété 6.2

Soit f une application de D_f dans $\mathbb{R}$.
f s'écrit de manière unique $f = p + i$, où p est paire et i est impaire.
p et i sont définies par : $\forall x \in D_f$, $p(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$
On dit que p est la *partie paire* de f et que i en est la *partie impaire*.

Remarques 6.3

La seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle.
Soient les applications ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de $x \mapsto e^x$.

Propriétés 6.4

- Si f et g ont même parité, fg est paire.
Si f et g sont de parités contraires, fg est impaire.
- Si f est paire ou impaire, $\dfrac{1}{f}$ est de même parité que f.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:
Si f et g sont paires (resp. impaires) alors $\alpha f + \beta g$ est paire (resp. impaire).
- Si f est bijective de D_f sur D_f et impaire, alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.
- Pour toute application g :
Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
Si f est impaire, et si g est paire ou impaire, alors $g \circ f$ a la même parité que g.

7 Applications périodiques

Définition 7.1

On considère ici des applications définies sur une partie D_f de $\mathbb{R}$.

Soit T un réel strictement positif.
L'application f est dite *T-périodique* si : $\forall x \in D_f,\ x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$

Propriété 7.2

Si f est T-périodique, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, f est nT-périodique.
Si f et g sont T-périodiques, alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont T-périodiques.
Si f est périodique, alors $\dfrac{1}{f}$ est T-périodique.
Si f est T-périodique, alors pour toute application g, $g \circ f$ est T-périodique.

Remarques 7.3

- Si f est périodique, il vaut mieux utiliser sa plus petite période positive (si elle existe).
Cette plus petite période n'existe pas toujours.
Par exemple, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ admet tout rationnel comme période.
- Soit f une application T_1-périodique, et g une application T_2-périodique.
On suppose que le rapport $\dfrac{T_1}{T_2}$ est rationnel. Alors $f+g$ et fg sont encore périodiques.
Par exemple : si $T_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ et $T_2 = \dfrac{\pi}{2}$, alors $f+g$ et fg sont $\dfrac{3\pi}{2}$-périodiques.
- Si f est T-périodique, alors l'application $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est $\dfrac{T}{|\alpha|}$-périodique.

8 Axes et centres de symétrie

Propriétés 8.1

Soit f une application f à valeurs réelles, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$.
La courbe représentative Γ de f (on dit aussi le *graphe* de f) est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ dans le plan affine P (muni d'un repère $O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$), x décrivant le domaine de f.
- L'application f est paire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy.
- De même, f est impaire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'origine O.

Propriétés 8.2

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, le domaine D_f étant symétrique par rapport au réel a.
La droite $x = a$ est axe de symétrie du graphe Γ de f
$\Leftrightarrow$ Pour tout x de D_f, $f(2a - x) = f(x)$.
$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à D_f, $f(a+h) = f(a-h)$.
$\Leftrightarrow$ l'application g définie par $g(x) = f(a+x)$ est paire.

Propriétés 8.3

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, le domaine D_f étant symétrique par rapport au réel a.
Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie du graphe Γ de f
$\Leftrightarrow$ Pour tout x de D_f, $f(2a - x) = 2b - f(x)$.
$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à D_f, $f(a+h) - b = b - f(a-h)$.
$\Leftrightarrow$ l'application g définie par $g(x) = f(a+x) - b$ est impaire.

Propriété 8.4

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, le domaine D_f étant tel que : $x \in D_f \Leftrightarrow x + T \in D_f$ ($T > 0$ donné).
L'application f est T-périodique
$\Leftrightarrow$ son graphe Γ est invariant dans toute translation de vecteur $kT(1,0)$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Propriété 8.5

Soit f une application bijective de D_f sur $f(D_f)$.
Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.