

Formes bilinéaires et formes quadratiques

Dans tout ce chapitre, K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 (en pratique $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), E est un K -e.v. et n est un entier non nul.

1. Généralités

Définition 1.1

Une forme bilinéaire sur E est une application de $E \times E$ dans K linéaire par rapport à chaque variable

C'est-à-dire $f: E \times E \rightarrow K$ bilinéaire $\Leftrightarrow \forall x, x', y, y' \in E$ et $\forall \lambda \in K$, on a :

$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$$

$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$$

$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$$

$$f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

Remarque 1.2

On a donc l'égalité : $f(\lambda x, y) = f(x, \lambda y) \quad \forall \lambda \in K$ et $\forall x, y \in E$.

Exemples 1.3

a. $m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto xy$$

\mathbb{R} est un \mathbb{R} -e.v.

$\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\# \quad m(x + x', y) = (x + x')y = xy + x'y = m(x, y) + m(x', y)$$

$$\# \quad m(\lambda x, y) = (\lambda x)y = \lambda(xy) = \lambda m(x, y)$$

$$\# \quad m(x, y + y') = x(y + y') = xy + xy' = m(x, y) + m(x, y')$$

$$\# \quad m(x, \lambda y) = x(\lambda y) = \lambda(xy) = \lambda m(x, y)$$

b. Soit \mathcal{V} l'ensemble des vecteurs du plan.

$$s: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{où "." est le produit scalaire usuel de deux vecteurs.}$$

\mathcal{V} est un \mathbb{R} -e.v.

$\forall u, u', v, v' \in \mathcal{V}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\# \quad s(u + u', v) = (u + u') \cdot v = u \cdot v + u' \cdot v = s(u, v) + s(u', v)$$

$$\# \quad s(\lambda u, v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v) = \lambda s(u, v)$$

$$\# \quad s(u, v + v') = u \cdot (v + v') = u \cdot v + u \cdot v' = s(u, v) + s(u, v')$$

$$\# \quad s(u, \lambda v) = u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v) = \lambda s(u, v)$$

Propriété 1.4

Soit f une forme bilinéaire sur E .

Soit v un vecteur de E et soient (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de $p \geq 2$ vecteurs de E .

Alors $f\left(\sum_{i=1}^p u_i, v\right) = \sum_{i=1}^p f(u_i, v)$ et $f\left(v, \sum_{i=1}^p u_i\right) = \sum_{i=1}^p f(v, u_i)$.

Démonstration

Démonstration par récurrence :

Vrai au rang 2 : $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$

On suppose vrai au rang $p - 1$.

$$f\left(\sum_{i=1}^p u_i, v\right) = f\left(\left(\sum_{i=1}^{p-1} u_i\right) + u_p, v\right) = f\left(\sum_{i=1}^{p-1} u_i, v\right) + f(u_p, v) = \sum_{i=1}^{p-1} f(u_i, v) + f(u_p, v) = \sum_{i=1}^p f(u_i, v).$$

La deuxième propriété se montre de la même façon.

Corollaire 1.5

Soit f une forme bilinéaire sur E .

Soient (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de $p \geq 2$ vecteurs de E et (v_1, v_2, \dots, v_q) une famille de $q \geq 2$ vecteurs de E .

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_q$ des scalaires.

Alors $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^q \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j f(u_i, v_j)$.

Propriété 1.6

Soit f une forme bilinéaire sur E .

$\forall x, y \in E, f(x, 0) = 0 = f(0, y)$.

Démonstration

$f(x, 0) = f(x, 0 \cdot x) = 0 \cdot f(x, x) = 0$ (faire attention à la nature des 0).

Propriété 1.7

L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des formes bilinéaires sur E est aussi un K -e.v.

De plus, si E est de dimension finie n sur K , alors $\mathcal{B}(E)$ est de dimension n^2 .

Démonstration (Exercice à la maison)

- La structure d'espace vectoriel est obtenue avec les lois usuelles :

- $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) \quad \forall x, y \in E \text{ et } \forall f, g \in \mathcal{B}(E)$.

- $(k \cdot f)(x, y) = k \cdot f(x, y) \quad \forall x, y \in E, \forall f \in \mathcal{B}(E) \text{ et } \forall k \in \mathbb{R}$.

• En premier lieu, on montre que $\mathcal{B}(E)$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel des applications de $E \times E$ dans K muni des dites lois.

• Pour la dimension, il faut trouver une base de $\mathcal{B}(E)$.

- On suppose $\dim_K E = n$.

- Soit $(e) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ une base de E .

- On considère la famille d'applications $(b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de $E \times E \rightarrow K$ définies par

$$\text{Si } u = \sum_{k=1}^n u_k e_k = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + \dots + u_n e_n$$

$$\text{et } v = \sum_{l=1}^n v_l e_l = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + \dots + v_n e_n$$

$$\text{on a } b_{ij}(u, v) = u_i v_j$$

Il faut donc vérifier :

- # Les $(b_{ij})_{i,j=1,n} \in \mathcal{B}(E)$.
- # Les $(b_{ij})_{i,j=1,n}$ forment un système générateur.
- # Les $(b_{ij})_{i,j=1,n}$ forment un système libre.
- # Les $(b_{ij})_{i,j=1,n}$ sont au nombre de n^2 .

Propriété 1.8

Soit $f \in \mathcal{B}(E)$.

Les applications suivantes sont des applications linéaires.

- $\forall x \in E, f_x : E \rightarrow K$
 $y \mapsto f(x, y)$
- $\forall y \in E, f_y : E \rightarrow K$
 $x \mapsto f(x, y)$

C'est-à-dire $f_x(y) = f(x, y)$ et, de même, $f_y(x) = f(x, y)$.

- $F_1 : E \rightarrow E^*$
 $x \mapsto f_x$
- $F_2 : E \rightarrow E^*$
 $y \mapsto f_y$

C'est-à-dire $(F_1(x))(y) = f(x, y)$ et, de même, $(F_2(y))(x) = f(x, y)$.

Démonstration

- $\forall y, y' \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in K$,
 $f_x(\lambda y + \mu y') = f(x, \lambda y + \mu y')$
 $= f(x, \lambda y) + f(x, \mu y')$
 $= \lambda f(x, y) + \mu f(x, y')$
 $= \lambda f_x(y) + \mu f_x(y')$
- $\forall x, x', y \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in K$,
 $(F_1(\lambda x + \mu x'))(y) = f_{\lambda x + \mu x'}(y)$
 $= f(\lambda x + \mu x', y)$
 $= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y)$
 $= \lambda f_x(y) + \mu f_{x'}(y)$
 $= \lambda (F_1(x))(y) + \mu (F_1(x'))(y)$
 $= (\lambda F_1(x) + \mu F_1(x'))(y)$

C'est-à-dire $F_1(\lambda x + \mu x') = \lambda F_1(x) + \mu F_1(x')$.

Propriété 1.9

Soient $f \in \mathcal{B}(E)$.

On suppose E de dimension finie n et soit $(e) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ une base de E .

On a : $f = g \Leftrightarrow f(e_i, e_j) = g(e_i, e_j) \quad \forall i = 1, n$ et $\forall j = 1, n$.

Démonstration

Soient $x = \sum_{i=1,n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1,n} y_i e_i$ deux éléments de E avec $(x_i)_{i=1,n}$ et $(y_i)_{i=1,n}$ des éléments de K .

(\Rightarrow) Trivial.

$$\begin{aligned}
(\Leftrightarrow) \quad \forall x, y \in E, f(x, y) &= f\left(\sum_{i=1, n} x_i e_i, \sum_{j=1, n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1, n} \sum_{j=1, n} x_i y_j f(e_i, e_j). \\
&= \sum_{i=1, n} \sum_{j=1, n} x_i y_j g(e_i, e_j) = g\left(\sum_{i=1, n} x_i e_i, \sum_{j=1, n} y_j e_j\right) \\
&= g(x, y).
\end{aligned}$$

Remarques 1.10

f est donc entièrement déterminée par les $f(e_i, e_j)$.

Si l'on pose $A = (f(e_i, e_j))_{i=1, n \text{ et } j=1, n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$, on a $f(x, y) = {}^t X A Y = {}^t (X A Y) = {}^t Y {}^t A X$.

Définition 1.11

La matrice A obtenue dans la remarque précédente est appelée matrice associée à f dans la base (e) et est notée $\mathcal{M}_e(f) = (f(e_i, e_j))_{i=1, n, j=1, n}$.

Exercice

Soit (e) la base canonique de \mathbb{R}^2 et soient $u \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de \mathbb{R}^2 dont les coordonnées sont données dans la base (e) .

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(u, v) \mapsto x_1 x_2 + 2x_1 y_2 - 3y_1 x_2 + 4y_1 y_2$$

a. Vérifier que f est bien une forme bilinéaire.

b. Donner la matrice associée à f dans la base (e) .

2. Soit la forme bilinéaire g sur \mathbb{R}^2 dont la matrice associée est $\mathcal{M}_e(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Expliciter $g(u, v)$ en fonction des coordonnées de u et de v dans (e) .

Propriété 1.12

Soit $f \in \mathcal{B}(E)$.

On suppose E de dimension finie n et soit (e) une base de E .

L'application $\varphi: \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ est un isomorphisme d'e.v.

$$f \mapsto \mathcal{M}_e(f)$$

Exercice

Faire la démonstration

Propriété 1.13 (Effet d'un changement de base)

On suppose que $\dim_K E = n$ et que (e) et (e') sont deux bases de E .

Soit S la matrice de passage de (e) à (e') .

Soit f une forme bilinéaire sur E (idem $f \in \mathcal{B}(E)$).

Soit A la matrice associée à f dans la base (e) et \tilde{A} la matrice associée à f dans la base (e') .

C'est-à-dire $A = \mathcal{M}_e(f) = (f(e_i, e_j))_{i=1, n \text{ et } j=1, n}$ et $\tilde{A} = \mathcal{M}_{e'}(f) = (f(e'_i, e'_j))_{i=1, n \text{ et } j=1, n}$.

On a $\tilde{A} = {}^t S A S$.

Démonstration

Soient x et y deux éléments de E .

Soient X et $Y \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées respectives de x et y dans la base (e) .

Soient X' et $Y' \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées respectives de x et y dans la base (e') .

Nous savons que $X = SX'$ et $Y = SY'$ donc ${}^tX = {}^tX' {}^tS$

$$f(x,y) = {}^tXAY = {}^tX' {}^tSAS Y' = {}^tX' ({}^tSAS) Y'$$

De plus, $f(x,y) = {}^tX' \tilde{A} Y'$.

Donc $\tilde{A} = {}^tSAS$ car l'égalité est vraie pour tout (x,y) de $E \times E$ (donc entre autres pour les $(e_i, e_j)_{i,j=1,n}$).

Remarques importantes 1.14

- Si $\det A \neq 0$, alors $\det \tilde{A} \neq 0$.

$$\text{Car } \det \tilde{A} = \det {}^tS \times \det A \times \det S$$

$$= \det S \times \det A \times \det S \quad \text{avec } \det S \neq 0 \text{ car } S \text{ inversible.}$$

Si E est de dimension finie n , le déterminant de $\mathcal{M}_e(f)$ s'appelle le discriminant de f .

- $\text{rg } A = \text{rg } \tilde{A}$.

Rappel : Si g et h sont deux applications linéaires, avec les hypothèses qui s'imposent, on a

$$h \text{ surjective} \Rightarrow \text{rg}(g) = \text{rg}(g \circ h) \quad (\text{car } g(F) = (g \circ h)(E))$$

$$g \text{ injective} \Rightarrow \text{rg}(h) = \text{rg}(g \circ h) \quad (\text{car les images par } g \text{ des vecteurs d'une base de } \text{Im } h \text{ restent libres})$$

Une matrice peut être considérée comme celle d'une application linéaire.

Donc, en particulier, si l'on multiplie une matrice à gauche ou à droite par une matrice inversible, on ne change pas le rang de la première.

S étant une matrice inversible, il en est de même pour tS . On obtient alors le résultat.

Définition 1.15

Soit une forme bilinéaire $f \in \mathcal{B}(E)$ où $\dim E = n$.

On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$ le rang de toute matrice représentative de f .

2. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.

Définition 2.1

Soit $f \in \mathcal{B}(E)$.

On dit que f est symétrique si et seulement si : $\forall x,y \in E, f(y,x) = f(x,y)$.

On dit que f est antisymétrique si et seulement si : $\forall x,y \in E, f(y,x) = -f(x,y)$.

Notation 2.2

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur E .

Exemples et contre-exemple 2.3

- $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = 5xy \quad f \text{ est symétrique.}$
- $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1 \quad f \text{ est antisymétrique.}$

- $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 - 2x_1y_2 - x_2y_1$
 f n'est ni symétrique ni antisymétrique.
 En effet, si $e_1 = (1;0)$ et $e_2 = (0;1)$, on a $f(e_1, e_2) = -2$ et $f(e_2, e_1) = -1$.

Propriété 2.4

On suppose E est de dimension finie et soit (e) une base de E .

Soient $f \in \mathcal{B}(E)$ et $A = \mathcal{M}_e(f)$.

- f est symétrique $\Leftrightarrow {}^tA = A$ c'est-à-dire A symétrique.
- f est antisymétrique $\Leftrightarrow {}^tA = -A$ c'est-à-dire A antisymétrique.

Démonstration

On suppose que $(e) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$.

Soit $x \in E$ de coordonnées $X \in K^n$ dans (e) .

Soit $y \in E$ de coordonnées $Y \in K^n$ dans (e) .

- $(\Leftrightarrow) \quad f(x, y) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY {}^tAX$
 $\quad \quad \quad = {}^tYAX = f(y, x).$
 $(\Rightarrow) \quad f(x, y) = f(y, x) \quad \forall x, y \in E$
 $\quad \quad \Rightarrow$ vrai entre autre pour les $f(e_i, e_j)$
 $\quad \quad \Rightarrow \quad {}^tA = A.$
- $(\Leftrightarrow) \quad f(x, y) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY {}^tAX$
 $\quad \quad \quad = {}^tY(-A)X = -{}^tYAX = -f(y, x)$
 $(\Rightarrow) \quad f(x, y) = -f(y, x) \quad \forall x, y \in E$
 $\quad \quad \Rightarrow$ vrai entre autre pour les $f(e_i, e_j)$
 $\quad \quad \Rightarrow \quad {}^tA = -A.$

Définition 2.5

Soit $f \in \mathcal{B}(E)$.

On dit que f est définie si et seulement si : $\forall x \in E, \quad f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Remarque 2.6

Le sens important dans la définition est (\Rightarrow) .

L'autre sens étant toujours vérifié.

Exemple et contre-exemple 2.7

Soit \mathcal{V} l'ensemble des vecteurs du plan.

- $f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto 3\vec{u} \cdot \vec{v}$
 f est définie car $f(\vec{u}, \vec{u}) = 3\|\vec{u}\|^2$ et $3\|\vec{u}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$.
- $f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto u_1v_1 - u_2v_2$ où $\vec{u}(u_1, u_2)$ et $\vec{v}(v_1, v_2)$ dans (\vec{i}, \vec{j}) base orthonormale.
 f n'est pas définie.
 En effet, si on prend $\vec{w}(-1, 1)$ dans (\vec{i}, \vec{j}) , on a $\vec{w} \neq 0$ et $f(\vec{w}, \vec{w}) = 0$.

Définition 2.8

On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou que K est un corps totalement ordonné. Soit $f \in \mathcal{B}(E)$.

On dit que f est positive si et seulement si : $\forall x \in E, f(x,x) \geq 0$.

On dit que f est négative si et seulement si $\forall x \in E, f(x,x) \leq 0$.

Remarque 2.9

Pour les formes bilinéaire, négative \neq pas positive.

Exemple et contre-exemple 2.10

- $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto 5xy$ f est positive car $f(x,x) = 5x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto -3xy$ f est négative car $f(x,x) = -3x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Soit \mathcal{V} l'ensemble des vecteurs du plan.
 $f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto u_1v_1 - u_2v_2$ où $\vec{u}(u_1, u_2)$ et $\vec{v}(v_1, v_2)$ dans (\vec{i}, \vec{j}) base orthonormale.
 f n'est ni positive ni négative. En effet, $f(\vec{i}, \vec{i}) = 1$ et $f(\vec{j}, \vec{j}) = -1$.

Théorème 2.11

Soit f une forme bilinéaire sur E de dimension finie n et soit (e) une base de E .

Soit $A = \mathcal{M}_e(f)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(f(x,y) = 0 \ \forall x \in E) \Rightarrow y = 0$ c'est-à-dire : $f_y = 0 \Rightarrow y = 0$.
- $(f(x,y) = 0 \ \forall y \in E) \Rightarrow x = 0$ c'est-à-dire : $f_x = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\det A \neq 0$.
- $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, K) = E^*, \exists ! y_0 \in E / \varphi(x) = f(x, y_0) \ \forall x \in E$ c'est-à-dire $\varphi = f_{y_0}$.

Démonstration

Soient $x \in E$ de coordonnées X dans (e) et $y \in E$ de coordonnées Y dans (e) .

On a donc : $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow {}^tXAY = 0$.

$$\begin{aligned} (i) \Leftrightarrow (iii) \quad & [(f(x,y) = 0 \ \forall x \in E) \Rightarrow y = 0] \\ & \Leftrightarrow [{}^tXAY = 0 \ \forall X \in K^n \Rightarrow Y = 0] \\ & \Leftrightarrow [AY = 0 \Rightarrow Y = 0] \\ & \Leftrightarrow \det A \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \Leftrightarrow (iii) \quad & [(f(x,y) = 0 \ \forall y \in E) \Rightarrow x = 0] \\ & \Leftrightarrow [{}^tXAY = 0 \ \forall Y \in K^n \Rightarrow X = 0] \\ & \Leftrightarrow [{}^tXA = 0 \Rightarrow X = 0] \\ & \Leftrightarrow \det A \neq 0. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, K)$ et soit $M = \mathcal{M}_e(\varphi)$.

$$\varphi(x) = MX = {}^tX'M \quad (\varphi(x) \in K).$$

$$f(x,y) = {}^tXAY.$$

$$f(x,y) = \varphi(x) \ \forall x \in E \Leftrightarrow {}^tXAY = {}^tX'M \quad \forall X \in K^n$$

$$\Leftrightarrow AY = {}^tM$$

$$\Leftrightarrow Y = A^{-1} \times {}^tM \quad \text{car } A \text{ inversible.}$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, K)$, on pose y_0 de coordonnées $A^{-1} \times {}^tM$ dans (e) , et on obtient le résultat.

(iv) \Rightarrow (i) Soit $\varphi : E \rightarrow K$
 $x \mapsto 0$.
 On a $\varphi \in \mathcal{L}(E, K)$.
 Donc $\exists! y_0 \in E / 0 = \varphi(x) = f(x, y_0) \quad \forall x \in E$.
 Or $f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in E$ donc $y_0 = 0$.

Remarque 2.12

La relation (iii) ne dépend pas de la base choisie.

Définition 2.13

Lorsqu'une forme bilinéaire f vérifie l'une des 4 propriétés du théorème, on dit que f est non dégénérée. On dit qu'elle est dégénérée dans le cas contraire.

Exemple 2.14

Soient F un e.v. réel, $(b) = (b_1, b_2)$ une base de F et f la forme bilinéaire sur F définie par :

$$f(u, v) = 3x_1x_2 + 2x_1y_2 - y_1x_2 + y_1y_2 \quad \text{lorsque } u \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ et } v \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ dans } (b).$$

On a $\mathcal{M}_b(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où $\det \mathcal{M}_b(f) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$.

Donc f est non dégénérée.

Propriété 2.15

Soit f une forme bilinéaire sur E de dimension finie n .
 f définie $\Rightarrow f$ non dégénérée.

Remarque 2.16

La réciproque est généralement fausse.

Démonstration

On suppose que : $\exists x \in E / f(x, y) = 0 \quad \forall y \in E$.
 On prend $y = x$, on obtient $f(x, x) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ car f est définie.

Définition 2.17

Soit f une forme bilinéaire (généralement symétrique dans la littérature) sur E .
 On appelle forme quadratique associée à f généralement notée Q_f ou q_f , l'application de E dans K définie par $Q_f(u) = f(u, u) \quad \forall u \in E$.

Remarque 2.18

Les définitions précédentes deviennent :
 f définie si et seulement si : $\forall x \in E, Q_f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
 f positive si et seulement si : $\forall x \in E, Q_f(x) \geq 0 \quad (K = \mathbb{R})$.

Exemples 2.19

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 d'une application bilinéaire f .

Soient x un vecteur de \mathbb{R}^3 de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

On a donc $q(x) = f(x,x) = {}^tXAX = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2$.

- Soit \mathcal{V} l'ensemble des vecteurs du plan.

Soit $f: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Si $\vec{u}(x,y)$ dans (\vec{i}, \vec{j}) base orthonormale, on a $Q_f(\vec{u}) = x^2 + y^2$.

Propriété 2.20

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

Alors $\forall u, v \in E, 2f(u,v) = q_f(u+v) - q_f(u) - q_f(v)$.

Remarques 2.21

- On peut trouver la formule sous la forme :
 $2f(x,y) = f(x+y, x+y) - f(x,x) - f(y,y)$
- On a $f(u,v) = \frac{1}{2}(q_f(u+v) - q_f(u) - q_f(v))$.
 f est donc entièrement déterminée par sa forme quadratique associée.
On dit que f est la forme polaire de q .
- Si E est de dimension finie, on parle parfois du discriminant de q_f pour le discriminant de f .
(Ainsi que d'autres termes)

Démonstration

$$\forall u, v \in E, q_f(u+v) = f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) = q_f(u) + 2f(u,v) + q_f(v).$$

Remarques 2.22

- Le comportement de q_f nous fait penser au développement d'un produit.

On suppose que $\dim E = n$ et que $(e) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ est une base de E .

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ non nulle et soit $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ c'est-à-dire $[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On pose $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ pour $i, j = 1, n$ ($a_{ij} \in K$) et $A = \mathcal{M}_e(f) = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ (la matrice A est symétrique).

$$q_f(x) = f(x,x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j a_{ij}.$$

$q_f(x)$ est donc un polynôme homogène de degré 2 sur K en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$
(c'est-à-dire tous les monômes sont de degré 2).

- (Réciproque)

Soit q est un polynôme homogène de degré 2 sur K en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

$$q = \sum_{i=1}^n q_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} x_i x_j$$

La matrice $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,n}$ définie par $\begin{cases} \alpha_{ii} = q_{ii} \\ \alpha_{ij} = \frac{1}{2} q_{ij} = \alpha_{ji} \end{cases}$ est bien symétrique.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, on vérifie aisément que $q(x) = {}^t X A X$.

q est donc la forme quadratique associée à la forme bilinéaire f dont la matrice dans la base canonique de K^n est A .

Exemple 2.23

Soit q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 10x_2x_3$ si x a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans la (e) base canonique de \mathbb{R}^3 .

La matrice de f la forme polaire de q dans (e) est $\mathcal{M}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Propriété 2.24

Si q est une forme quadratique, $q_f(\lambda x) = \lambda^2 q_f(x)$ pour tout scalaire λ et tout vecteur x .

Propriété 2.25

L'application qui, à une forme bilinéaire symétrique sur E , associe sa forme quadratique associée est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Remarques 2.26

On a en particulier que l'ensemble des formes quadratiques (muni des lois usuelles) est un e.v.

Démonstration (Exercice à la maison)

- morphisme d'e.v.
- bijection

3. Orthogonalité associée à une forme bilinéaire symétrique

Définition 3.1

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

- On dit que deux éléments x et y de E sont orthogonaux relativement à f si et seulement si $f(x,y) = 0$.
- On dit que deux parties F et G de E sont orthogonales relativement à f ssi $f(x,y) = 0 \quad \forall x \in F$ et $\forall y \in G$.
- Soit $M \subset E$, on appelle orthogonal de M relativement à f et on note M^\perp l'ensemble défini par $M^\perp = \{x \in E / f(x,y) = 0 \quad \forall y \in M\} = \{y \in E / f(x,y) = 0 \quad \forall x \in M\}$.

Exemples 3.2

- Soit $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $((x_1, y_1); (x_2, y_2)) \mapsto 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 3y_1y_2$.
 - Les vecteurs $(1,1)$ et $(2,-1)$ sont orthogonaux relativement à f car
 $f((1, 1); (2, -1)) = 2 \times 1 \times 2 - 1 \times (-1) - 1 \times 2 + 3 \times 1 \times (-1) = 4 + 1 - 2 - 3 = 0$.
 - Soit $u = (1,-1)$, on cherche $\langle u \rangle^\perp$.
 $v = (x,y) \in \langle u \rangle^\perp \Leftrightarrow f(v,w) = 0 \quad \forall w \in \langle u \rangle$
 $\Leftrightarrow f(v, \lambda u) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow f(v, u) = 0$
 $\Leftrightarrow 2x + x - y - 3y = 0$
 $\Leftrightarrow 3x - 4y = 0$
 $\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x$.
 Donc $\langle u \rangle^\perp = \{v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{3}{4}x\}$
 $= \{v = (x, \frac{3}{4}x) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (4,3) \rangle$.
- Soit \mathcal{S} l'ensemble des vecteurs du plan muni d'une base orthonormale (\vec{i}, \vec{j}) et soit f le produit scalaire usuel.
 Soit $H = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ où $\vec{u}_1(1, 1)$ et $\vec{u}_2(3, 3)$ dans (\vec{i}, \vec{j}) .
 On a $H^\perp = \{u_1\}^\perp = \langle u_1 \rangle^\perp = \langle \vec{u}_3 \rangle$ où $\vec{u}_3(1,-1)$ dans (\vec{i}, \vec{j}) .

Remarques 3.3

- On parle aussi d'orthogonal relativement à une forme quadratique.
- Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et soient F et G deux parties orthogonales de E .
 On a $F \subset G^\perp$ et $G \subset F^\perp$.

Propriété 3.4

Soit M une partie non vide de E , M^\perp (relativement à $f \in \mathcal{S}(E)$) est un s.e.v. de E .

Démonstration

- M^\perp non vide car $0 \in M^\perp$.
- Soient $x_1, x_2 \in M^\perp$.
 $\forall y \in M, f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) = 0 + 0 = 0$.
 Donc $x_1 + x_2 \in M^\perp$.
- Soient $x \in M^\perp$ et $\lambda \in K$.
 $\forall y \in M, f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = \lambda \cdot 0 = 0$.
 Donc $\lambda \cdot x \in M^\perp$.

Propriétés 3.5

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et soient A et B deux sous-ensembles de E . On a :

- $\{0\}^\perp = E$
- $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $(A \cap B)^\perp \supset A^\perp + B^\perp$
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
- $(\text{Vect}(A))^\perp = A^\perp$

Remarque 3.6

On n'a pas nécessairement $E^\perp = \{0\}$.

Démonstration

- a. $\forall x \in E, f(x, 0) = 0$.
- b. $x \in (A \cup B)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in A \cup B, f(x, y) = 0$
 $\Leftrightarrow \forall y \in A, f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in B, f(x, y) = 0$
 $\Leftrightarrow x \in A^\perp \text{ et } x \in B^\perp$
 $\Leftrightarrow x \in A^\perp \cap B^\perp$.
- c. $A^\perp = \{x \in E / f(x, a) = 0 \quad \forall a \in A\}$
 $(A^\perp)^\perp = \{x \in E / f(x, y) = 0 \quad \forall y \in A^\perp\}$
 $x \in A \Rightarrow \forall y \in A^\perp, f(x, y) = 0$
 $\Rightarrow x \in (A^\perp)^\perp$.
- d. *Version 1 :* $x \in A^\perp + B^\perp \Leftrightarrow \exists a \in A^\perp \text{ et } \exists b \in B^\perp / x = a + b$.
 $\forall y \in A \cap B, f(x, y) = f(a + b, y) = f(a, y) + f(b, y)$.
 Or $f(a, y) = 0$ car $y \in A$ et $a \in A^\perp$ et $f(b, y) = 0$ car $y \in B$ et $b \in B^\perp$.
 D'où $f(x, y) = 0 + 0 = 0$. C'est-à-dire $x \in (A \cap B)^\perp$.
- Version 2 :* $A \cap B \subset A \Rightarrow A^\perp \subset (A \cap B)^\perp$
 $A \cap B \subset B \Rightarrow B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$
 $\Rightarrow A^\perp \cup B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$
 $\Rightarrow \langle A^\perp \cup B^\perp \rangle \subset (A \cap B)^\perp \quad \text{car } (A \cap B)^\perp \text{ s.e.v.}$
 $\Rightarrow A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$.
- e. $y \in B^\perp$
 $\Leftrightarrow \forall x \in B, f(x, y) = 0$
 $\Rightarrow \forall x \in A, f(x, y) = 0$ car $A \subset B \Rightarrow y \in A^\perp$.
- f. • (c) $A \subset \text{Vect} A$ donc $(\text{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$.
 • (d) Pour tout $x \in \text{Vect} A$, x est une C.L. d'éléments de A .
 C'est-à-dire $x = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ avec J fini, $\lambda_i \in K$ et $x_i \in A$
 $y \in A^\perp \Rightarrow \forall i \in J, f(x_i, y) = 0$ car $x_i \in A$
 $\Rightarrow \forall i \in J, \lambda_i f(x_i, y) = 0$
 $\Rightarrow \sum_{i \in J} \lambda_i f(x_i, y) = 0$
 $\Rightarrow f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i x_i, y\right) = 0$
 $\Rightarrow f(x, y) = 0 \Rightarrow y \in (\text{Vect} A)^\perp$.

Propriété 3.7

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E ($f \in \mathcal{S}(E)$).

Soient F et G deux sous ensembles orthogonaux de E alors toute combinaison linéaire d'éléments de F est orthogonale à toute combinaison linéaire d'éléments de G .

C'est-à-dire, $\text{Vect}(F)$ et $\text{Vect}(G)$ sont orthogonaux.

Démonstration

Soit $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ une famille de d'éléments de F et soit $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_p)$ une famille de d'éléments de G .

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p$ des scalaires.

On a : $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j f(x_i, y_j)$.

Remarque 3.8

Cette propriété pouvait montrer que M^\perp est un s.e.v. de E .

Corollaire 3.9

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E ($f \in \mathcal{S}(E)$).

Soit H un s.e.v. de E de dimension finie $p \geq 1$.

Soit $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_p)$ une base de H .

On a $H^\perp = \langle b \rangle^\perp = \{b\}^\perp = b^\perp$.

Démonstration

- $(b) \subset H$ donc $H^\perp \subset b^\perp$
- (b) et $(b)^\perp$ sont orthogonaux donc $\text{Vect}(b)$ et $\text{Vect}(b^\perp)$ sont orthogonaux.
C'est-à-dire H et b^\perp sont orthogonaux.
D'où $b^\perp \subset H^\perp$.

Remarque 3.10

Dans le reste du cours, nous considérerons uniquement les orthogonaux de s.e.v.

Définition 3.11

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

On dit qu'un élément x de E est isotrope relativement à f si et seulement si $f(x,x) = 0$.

On dit que F s.e.v de E est (totalement) isotrope si et seulement si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

Remarques 3.12

- x non isotrope $\Leftrightarrow f(x,x) \neq 0$.
- Soit F un s.e.v. (isotrope) de E .
Si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ alors tout vecteur de $F \cap F^\perp$ est isotrope.
- Si f est définie, il n'existe pas de vecteur isotrope hormis le vecteur nul.

Définitions 3.13

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E ($f \in \mathcal{S}(E)$).

On appelle noyau de f ou de q_f généralement noté N_f l'ensemble des éléments de E orthogonaux à E tout entier c'est-à-dire $N_f = E^\perp$.

On dit qu'un s.e.v. F de E est non singulier si la restriction de f à $F \times F$ est non dégénérée.

Remarques 3.14

- On a en particulier : pour tout s.e.v M de E , $N_f \subset M^\perp$.
- En dimension finie, f non dégénérée $\Leftrightarrow N_f = \{0\} = E^\perp$.
- On a : F non singulier $\Leftrightarrow F \cap F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow F$ non isotrope.

Propriété 3.15

On suppose que E est de dimension finie n .
 Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .
 L'application linéaire $F_1 : E \rightarrow E^*$

$$x \mapsto f_x \quad \text{vérifie les propriétés suivantes :}$$

- a. $\text{rg}(f) = \text{rg}(F_1)$
- b. $N_f = \text{Ker } F_1$.

On a donc : f non dégénérée $\Leftrightarrow N_f = \{0\}$
 $\Leftrightarrow \text{Ker } F_1 = \{0\}$
 $\Leftrightarrow F_1$ injective.

$$\text{Et } \dim E = \dim \text{Ker } F_1 + \text{rg}(F_1) = \dim N_f + \text{rg}(f) \\ = \dim E^\perp + \text{rg}(f).$$

$$\text{C'est-à-dire } \dim E^\perp = \dim E - \text{rg}(f)$$

Démonstration

- a. Soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .
 Soit $(e^*) = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ la base de E^* définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ ($= 1$ si $i = j$, $= 0$ si $i \neq j$)
 Soit $A = \mathcal{M}_e(f) = (a_{ij})_{i=1, n \text{ et } j=1, n}$ la matrice associée à f dans la base (e) .
 Soit $B = \mathcal{M}_{ee^*}(F_1) = (b_{ij})_{i=1, n \text{ et } j=1, n}$ la matrice associée à F_1 dans les bases (e) et (e^*) .

$$\text{Pour tous } i=1, n \text{ et } j=1, n, \text{ on a : } a_{ij} = f(e_i, e_j). \\ \text{et : } F_1(e_i) = \sum_{k=1}^n b_{ki} e_k^*.$$

$$\text{D'où } (F_1(e_i))(e_j) = \left(\sum_{k=1}^n b_{ki} e_k^* \right) (e_j) = \sum_{k=1}^n b_{ki} e_k^*(e_j) = b_{ji}.$$

$$\text{Or } (F_1(e_i))(e_j) = f(e_i, e_j) = a_{ij}.$$

$$\text{Donc } A = {}^t B$$

$$\text{Il s'en suit que } \text{rg}(f) = \text{rg } A = \text{rg } B = \text{rg}(F_1).$$

- b. $\text{Ker } F_1 = \{x \in E / F_1(x) = 0\}$
 $= \{x \in E / \forall y \in E, (F_1(x))(y) = 0\}$
 $= \{x \in E / \forall y \in E, f_x(y) = 0\}$
 $= \{x \in E / \forall y \in E, f(x, y) = 0\}$
 $= E^\perp = N_f$

Définition 3.16

Soit M un s.e.v. de E où E est de dimension finie.
 L'ensemble $M^0 = \{g \in E^* / g(x) = 0 \forall x \in M\}$ est appelé annulateur de M .

Lemme 3.17

Soit M un s.e.v. de E où E est de dimension finie.
 Alors $\dim E = \dim M + \dim M^0$.

Démonstration

Soit $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_p)$ une base de M .
 On complète (b) pour obtenir une base (e) de E : $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_p, v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_n)$.

Soit $(e^*) = (b_1^*, b_2^*, b_3^*, \dots, b_p^*, v_{p+1}^*, v_{p+2}^*, \dots, v_n^*)$ la base duale de E^* obtenue à partir de (e) .

Nous allons montrer que $(v^*) = (v_{p+1}^*, v_{p+2}^*, \dots, v_n^*)$ est une base de M^0 .

On aura alors que $\dim M^0 = n - p = \dim E - \dim M$

Puisque (v^*) est une famille extraite d'une base, elle est, en particulier, extraite d'une famille libre. C'est donc une famille libre. Il reste à montrer que (v^*) est une famille génératrice de M^0 .

Remarquons d'abord que $\forall i=p+1, n$ et $\forall j=1, p$, on a : $v_i^*(b_j) = 0$ d'où $v_i^*(x) = 0 \forall x \in M$
c'est-à-dire $v_i^* \in M^0$.

Soit $g \in M^0$ et soit $x \in E$ et $(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans (e) .

D'après la définition de (e^*) , $x_i = b_i^*(x) \forall i=1, p$ et $x_i = v_i^*(x) \forall i=p+1, n$.

$$\begin{aligned} \text{On a } g(x) &= g(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_p b_p + x_{p+1} v_{p+1} + \dots + x_n v_n) \\ &= x_1 g(b_1) + x_2 g(b_2) + \dots + x_p g(b_p) + x_{p+1} g(v_{p+1}) + \dots + x_n g(v_n) \\ &= x_{p+1} g(v_{p+1}) + x_{p+2} g(v_{p+2}) + \dots + x_n g(v_n) && \text{car les } b_i \text{ sont dans } M \\ &= g(v_{p+1}) x_{p+1} + g(v_{p+2}) x_{p+2} + \dots + g(v_n) x_n \\ &= g(v_{p+1}) v_{p+1}^*(x) + g(v_{p+2}) v_{p+2}^*(x) + \dots + g(v_n) v_n^*(x) \\ &= (g(v_{p+1}) v_{p+1}^* + g(v_{p+2}) v_{p+2}^* + \dots + g(v_n) v_n^*)(x) \end{aligned}$$

C'est-à-dire $g = g(v_{p+1}) v_{p+1}^* + g(v_{p+2}) v_{p+2}^* + \dots + g(v_n) v_n^*$ avec $g(v_i) \in K \forall i=p+1, n$.

Lemme 3.18

$(E^*)^* = \mathcal{L}(E^*, K)$, le bidual de E est canoniquement isomorphe à E .

Démonstration

Pour tout x de E , soit $\varphi_x : E^* \rightarrow K$ c'est-à-dire $\varphi_x \in (E^*)^*$ et $\varphi_x(f) = f(x)$.
 $f \mapsto f(x)$

Soit $\varphi : E \rightarrow (E^*)^*$
 $x \mapsto \varphi_x$

Il faut montrer que φ est un isomorphisme

$$\begin{aligned} \# \quad \forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K, \\ \forall f \in E^*, (\varphi(\lambda x + \mu y))(f) &= \varphi_{\lambda x + \mu y}(f) \\ &= f(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda \varphi_x(f) + \mu \varphi_y(f) \\ &= (\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y))(f) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$.

Puisque E et E^* , il en est de même de E et $(E^*)^*$.

Il suffit de montrer que φ est injective.

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi_x = 0 \Rightarrow \varphi_x(f) = 0 \forall f \in E^* \Rightarrow f(x) = 0 \forall f \in E^*.$$

Soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et soit $(e^*) = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale.

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) les coordonnées de x dans (e)

En particulier, l'égalité $f(x) = 0$ doit être vraie pour tout les élément de (e^*) .

D'où $\forall i=1, n, e_i^*(x) = 0$ c'est-à-dire $x_i = 0$ et donc $x = 0$.

D'où $\text{Ker } \varphi = \{0\}$

Lemme 3.19

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E de dimension finie et soit M un s.e.v. de E .
Alors $\dim M^\perp = \dim (F_1(M))^0$.

Démonstration

$$F_1 : E \rightarrow E^*$$

$$x \mapsto f_x$$

$$F_1(M) = \{f_x \text{ où } x \in M\}$$

$$\begin{aligned} (F_1(M))^0 &= \{g \in (E^*)^* / g(f_x) = 0 \forall f_x \in F_1(M)\} \\ &= \{g_y \in (E^*)^* / g_y(f_x) = 0 \forall f_x \in F_1(M)\} \\ &\simeq \{y \in E / f_x(y) = 0 \forall f_x \in F_1(M)\} \\ &= \{y \in E / f(x, y) = 0 \forall x \in M\} = M^\perp. \end{aligned}$$

Théorème 3.20

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E de dimension finie. Soit M un s.e.v. de E . On a :

- $\dim E = \dim M + \dim M^\perp - \dim (M \cap N_f)$
- $M^{\perp\perp} = M + N_f$.

Remarque 3.21

Si f est non dégénérée, on a donc $M^{\perp\perp} = M$.

Démonstration

- On a $\dim M^\perp = \dim (F_1(M))^0$.
Alors $\dim E = \dim E^* = \dim F_1(M) + \dim (F_1(M))^0$.
Soit F la restriction de F_1 de M .
D'après le théorème du rang, $\dim M = \dim \text{Ker } F + \dim \text{Im } F$.
Donc $\dim M = \dim (M \cap N_f) + \dim F_1(M)$.
$$= \dim (M \cap N_f) + \dim E - \dim (F_1(M))^0$$
$$= \dim (M \cap N_f) + \dim E - \dim M^\perp$$
- On a $\dim E = \dim M + \dim M^\perp - \dim (M \cap N_f)$.
Avec M^\perp à la place de M , on obtient $\dim E = \dim M^\perp + \dim (M^\perp)^\perp - \dim (M^\perp \cap N_f)$
Puisque $N_f \subset M^\perp$, $\dim (M^\perp \cap N_f) = \dim N_f$.
Par soustraction, $\dim M - \dim (M \cap N_f) + \dim (M^\perp)^\perp + \dim N_f = 0$.
Donc $\dim (M^\perp)^\perp = \dim (M \cap N_f) - \dim N_f - \dim M$
Or $\dim (M + N_f) = \dim M + \dim N_f - \dim (M \cap N_f)$
D'où $\dim (M^\perp)^\perp = \dim (M + N_f)$.
D'après de précédentes propriété et remarque, on a $M \subset (M^\perp)^\perp$ et $N_f \subset (M^\perp)^\perp$.
Donc $M + N_f \subset (M^\perp)^\perp$.
Il s'en suit que $M + N_f = (M^\perp)^\perp$.

Corollaire 3.22

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E de dimension finie n ($f \in \mathcal{S}(E)$).

Soit M un s.e.v. de E de dim finie.

Pour avoir $E = M \oplus M^\perp$, il faut et il suffit que M soit non isotrope.

Démonstration

- Admis dans le cadre général.
- Si E est de dimension finie.
 - (\Rightarrow) évident
 - (\Leftarrow) $M \cap M^\perp = \{0\}$.
Or $N_f \subset M^\perp$ donc $M \cap N_f = \{0\}$.
 $\dim E = \dim M + \dim M^\perp - \dim (M \cap N_f)$.
D'où $\dim E = \dim M + \dim M^\perp$.

Remarque 3.23

M et M^\perp ne sont pas nécessairement supplémentaires.

Exemple 3.24

Soit $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Soit $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_3 \text{ et } x_2 = 0\}$: $\dim H = 1$ et $u = (1, 0, 1)$ est une base de H .

$$y \in H^\perp \Leftrightarrow y \in u^\perp \Leftrightarrow f(u, y) = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_3 = 0.$$

D'où $H^\perp = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 = y_3\}$.

On a $H \subset H^\perp$ et $\dim H^\perp = 2$. La restriction de f à H est dégénérée.

Remarques 3.25

- f définie \Rightarrow (ii) du corollaire.
- On suppose que E est de dimension finie n .
Soit $(e) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ une base de E .
Soit $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_p)$ une base de M .
En particulier, $M^\perp = (b)^\perp$.
 $(b)^\perp$ est l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de E tq $f(x, b_i) = 0$ avec $i = 1, p$.
Nous sommes donc en présence d'un système linéaire à n inconnue et p équations, l'espace des solutions est donc de dimension supérieur où égale à $n - p$.
 $\dim (b)^\perp = \dim M^\perp \geq n - p$
 $\Rightarrow \dim M + \dim M^\perp \geq n$.

Définition 3.26

On suppose que E est de dimension finie n et soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

- On dit qu'une base $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ est orthogonale relativement à f ssi $f(b_i, b_j) = 0$ quand $i \neq j$.
- On dit qu'une base $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ est orthonormale relativement à f si et seulement si :
 - i) elle est orthogonale.
 - ii) $f(b_i, b_j) = 1$ si $i=j$.

Remarque 3.27

Avec les notations de la définition précédente :

- (b) orthogonale si et seulement si $\mathcal{M}_b(f)$ est une matrice diagonale.
- (b) orthonormale si et seulement si $\mathcal{M}_b(f)$ est la matrice identité.

Exemple 3.28

Soit $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1.$$

On a $f((x_1, y_1), (x_1, y_1)) = x_1x_1 + y_1y_1 - 2x_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1$.

Soient $b_1 = (1, -2)$ et $b_2 = (-1, -1)$. La famille $(b) = (b_1, b_2)$ est bien une base de \mathbb{R}^2 .

On a : $f(b_1, b_2) = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$, $f(b_1, b_1) = 1 + 4 + 4 = 9$ et $f(b_2, b_2) = 1 + 1 - 2 = 0$.

Donc (b) est une base orthogonale relativement à f .

Propriété 3.29

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

Soit $x \in E$ non isotrope relativement à f .

Alors $\langle x \rangle \cap \langle x \rangle^\perp = \{0\}$ et $E = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^\perp$.

Démonstration

Soit $u \in \langle x \rangle \cap \langle x \rangle^\perp$ (c'est-à-dire u isotrope).

$$u \in \langle x \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in K / u = \lambda x.$$

$$f(u, u) = 0 \Rightarrow f(\lambda x, \lambda x) = 0 \Rightarrow \lambda^2 f(x, x) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Donc $\langle x \rangle \cap \langle x \rangle^\perp = \{0\}$.

On a $\dim \langle x \rangle = 1$.

Il suffit donc d'utiliser le corollaire précédent pour obtenir $E = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^\perp$.

Propriété 3.30

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

Si $f \neq 0$ alors il existe un vecteur non isotrope relativement à f .

C'est-à-dire : $\exists c \in E / f(c, c) \neq 0$.

Démonstration

Si $f \neq 0$ alors $\exists u, v \in E / f(u, v) \neq 0$.

- Si $f(u, u) \neq 0$, on prend $c = u$.
- Si $f(v, v) \neq 0$, on prend $c = v$.
- Si $f(u, u) = 0$ et $f(v, v) = 0$, on prend $c = u + v$.
 $f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(v, v) + 2f(u, v) = 2f(u, v) \neq 0$.

Théorème 3.31

On suppose que E est de dimension finie n .

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E .

Alors il existe une base orthogonale relativement à f .

De plus, si $f \neq 0$, alors cette base contient au moins un vecteur non isotrope.

Démonstration

Par récurrence.

- Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer.
- On suppose vrai jusqu'au rang n .
C'est-à-dire si la dimension de l'espace est n alors il existe une base orthogonale relativement à f .

Soit un espace E de dimension $n + 1$.

Si $f \equiv 0$, alors toute base de E est orthogonale relativement à f .

Si $f \neq 0$, alors $\exists c \in E / f(c, c) \neq 0$

On a $E = \langle c \rangle \oplus \langle c \rangle^\perp$

Or $\dim \langle c \rangle^\perp = n$ donc il existe une base $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ orthogonale relativement à f .

Soit $(b') = (c, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) : (b')$ est une base de E .

$\forall i = 1, n, f(c, b_i) = 0$.

Donc (b') est une base orthogonale relativement à f .

Application 3.32

Soit E un e.v. de dim 3 sur \mathbb{R} (on a bien $\chi(\mathbb{R}) \neq 2$) et soit $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f la forme bilinéaire symétrique sur E définie par $\mathcal{M}_e(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dans la suite toutes les coordonnées sont données dans la base (e) .

Il existe un vecteur non isotrope.

Si $u(x, y, z)$ et $v(x', y', z')$, $f(u, v) = 2xx' - xy' + xz' - yx' + 2yy' + yz' + zx' + zy' + 2zz'$

$$f(u, u) = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz).$$

$$f(e_1, e_1) = 2.$$

Donc on prend $b_1 = e_1$.

On a $E = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_1 \rangle^\perp$

$$\begin{aligned} w(a, b, c) \in \langle b_1 \rangle^\perp &\Leftrightarrow f(w, b_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(w, e_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a - b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 2a + c. \end{aligned}$$

Si on pose $u_1(1, 2, 0)$ et $u_2(0, 1, 1)$, on a $\langle b_1 \rangle^\perp = \langle u_1, u_2 \rangle$.

$$f(u_1, u_1) = f(e_1, e_1) + 4f(e_1, e_2) + 4f(e_2, e_2) = 6 \neq 0.$$

Donc, on prend $b_2 = u_1$.

On a $E = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \{\text{orthogonal de } u_2 \text{ dans } \langle u_1, u_2 \rangle\}$

$$E = \langle b_1, b_2 \rangle \oplus \langle b_1, b_2 \rangle^\perp.$$

$$\begin{aligned} w(a, b, c) \in \langle b_1, b_2 \rangle^\perp &\Leftrightarrow \begin{cases} f(w, b_1) = 0 \\ f(w, b_2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(w, e_1) = 0 \\ f(w, e_1 + 2e_2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(w, e_1) = 0 \\ f(w, e_2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ 3a - 3b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = -b \end{cases} \end{aligned}$$

Si on pose $b_3(1, 1, -1)$, on a $\langle b_1, b_2 \rangle^\perp = \langle b_3 \rangle$.

$(B) = (b_1, b_2, b_3)$ est une base orthogonale relativement à f .

$$f(b_3, b_3) = 0 \text{ donc } \mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On a } \det \mathcal{M}_B(f) = 0.$$

4. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés

Remarque 4.1

E de bases $(e) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ et $(e') = (e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_n)$ où (e') est une base orthogonale relativement à f .

Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i \in E$, $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $X' = (x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soient P la matrice de passage de (e) à (e') , $A = \mathcal{M}_e(f)$ et $A' = \mathcal{M}_{e'}(f)$.

Pour simplifier, on suppose que A' est rangée de telle façon que les p premiers termes de la matrice sont non nuls (p désignant $\text{rg}(f)$) et que l'on dispose les positifs en premier.

On a $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f(e_i, e_j)$ mais aussi $q(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 f(e'_i, e'_i) = \sum_{i=1}^p x_i^2 q(e'_i)$.

$$e'_1 = \varphi_1(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \quad x'_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$e'_2 = \varphi_2(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \quad x'_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

...

$$e'_n = \varphi_n(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \quad x'_n = \varphi_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Comment trouver (e') à partir des $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$? Réponse : $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$.

Propriété 4.2

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie n .

On suppose que f est de rang p .

Il existe une base $(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n)$ orthogonale relativement à f et un entier r tels que :

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1 \quad \text{si } i = 1, \dots, r.$$

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = -1 \quad \text{si } i = r + 1, \dots, p.$$

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 0 \quad \text{si } i > p.$$

Corollaire 4.3 Loi d'inertie de Sylvester : cas particulier où $K = \mathbb{R}$.

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie n .

Soit $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ une base orthogonale relativement à f .

Le nombre r d'indices i tels que $f(b_i, b_i) > 0$ et le nombre s d'indices j tels que $f(b_j, b_j) < 0$ sont des invariants de f (ne dépendent pas de la base orthogonale choisie).

Le couple (r, s) s'appelle la signature de f .

Remarque 4.4

On a de plus $r + s = \text{rang de } f = \text{rang de la matrice associée à } f = \text{rang de la forme quadratique associée à } f$.

Démonstration

Soit $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ une base orthogonale relativement à f .

Si on pose $f(b_i, b_i) = a_i$, pour tout $i = 1, n$.

On a $q(x) = \sum_{i=1}^p a_i x_i^2$ avec $(x_i)_{i=1, n}$ les coordonnées de x dans (b) .

On peut arranger les termes de façon à mettre les coefficients positifs en premier.

Il existe donc un entier r tel que $a_i > 0$ pour tout $i = 1, r$ et $a_i < 0$ pour tout $i = r + 1, p$.

$$\text{On a : } q(x) = \sum_{i=1}^r a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^p (-a_i) x_i^2 = \sum_{i=1}^r (\sqrt{a_i} x_i)^2 - \sum_{i=r+1}^p (\sqrt{-a_i} x_i)^2$$

En posant $x'_i = \sqrt{a_i} x_i$ pour tout $i = 1, r$ et $x'_i = \sqrt{-a_i} x_i$ pour tout $i = r + 1, p$, on obtient $q(x) = \sum_{i=1}^r x_i'^2 - \sum_{i=r+1}^p x_i'^2$.

Il reste à montrer que r ne dépend pas de la base orthogonale choisie.

Soit $(b') = (b'_1, b'_2, b'_3, \dots, b'_n)$ une autre base orthogonale relativement à f .

On suppose que $f(b'_i, b'_i) = c_i$, pour tout $i = 1, n$ et $q(x) = \sum_{i=1}^{r'} c_i x_i'^2 - \sum_{i=r'+1}^p (-c_i) x_i'^2$ avec $(x'_i)_{i=1, n}$ les coordonnées de x dans (b') .

On pose $F = \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle$, $G = \langle b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_p \rangle$, $F' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_{r'} \rangle$ et $G' = \langle b'_{r+1}, b'_{r+2}, \dots, b'_p \rangle$.

Si $x \in F \setminus \{0\}$ ou $F' \setminus \{0\}$, alors $q(x) > 0$ et $q(x) \leq 0$ sinon.

Donc $F \cap G' = \{0\}$.

Puisque F et G' sont deux s.e.v. de E en somme directe, on a $\dim F + \dim G' \leq n$.

C'est-à-dire : $r + (n - r') \leq n$ ou encore $r \leq r'$.

En utilisant le même raisonnement avec $F' \cap G$, on obtient $r' \leq r$.

5. Méthode de Gauss

Théorie 5.1

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Nous allons modifier q en appliquant les critères suivants :

$$\# C1 : \exists \alpha_k \neq 0, \quad q(x) = \alpha_k [x_k^2 + 2x_k[L]] + Q$$

où L est une forme linéaire en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sauf x_k .

et Q est une forme quadratique en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sauf x_k .

$$q(x) = \alpha_k (x_k + L)^2 - a_k L^2 + Q$$

où $x_k + L$ est une forme linéaire en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

et $\alpha_k L^2 + Q$ est une forme quadratique en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sauf x_k .

$$\# C2 : \forall k=1, n, \quad \alpha_k = 0 \quad \exists k, l \text{ tq } \alpha_{k,l} \neq 0$$

$$q(x) = 2\alpha_{k,l} [x_k x_l + x_k[L_1] + x_l[L_2]] + Q$$

où L_1 et L_2 sont des formes linéaires en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sauf x_k et x_l .

et Q est une forme quadratique en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sauf x_k et x_l .

$$q(x) = 2\alpha_{k,l} [(x_k + L_2)(x_l + L_1) - L_1 L_2] + Q$$

$$q(x) = \frac{1}{2} \alpha_{k,l} [(x_k + L_2) + (x_l + L_1)]^2 - [(x_k + L_2) - (x_l + L_1)]^2 - 2\alpha_{k,l} L_1 L_2 + Q$$

où $-2\alpha_{k,l} L_1 L_2 + Q$ est une forme quadratique en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sauf x_k et x_l .

Remarque 5.2

$(x_k + L_2) + (x_l + L_1)$ et $(x_k + L_2) - (x_l + L_1)$ sont linéairement indépendants.

Application 5.3

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 12x_2 x_3$$

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1(2x_2 - x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2 x_3$$

$$q(x) = (x_1 + (2x_2 - x_3))^2 - (2x_2 - x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2 x_3$$

$$q(x) = (x_1 + (2x_2 - x_3))^2 - (4x_2^2 - 4x_2 x_3 + x_3^2) + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2 x_3$$

$$q(x) = (x_1 + (2x_2 - x_3))^2 - 8x_2 x_3$$

$$q(x) = (x_1 + (2x_2 - x_3))^2 - 2(x_2 + x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2.$$

$x_1 + 2x_2 - x_3$, $x_2 + x_3$ et $x_2 - x_3$ sont linéairement indépendants.

La signature de q est $(2; 1)$.

On pose $x'_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$, $x'_2 = x_2 + x_3$ et $x'_3 = x_2 - x_3$.

Si $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, on a $X' = SX$.

S est inversible et peut-être considérée comme la matrice de passage d'une base (b) à la base canonique.

On a $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P_{e \rightarrow b}$.

Si y a pour coordonnées $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ dans (b) , alors $q(y) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$.

Propriétés 5.4

Soit f une forme bilinéaire symétrique de signature (r, s) sur E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie n .

- $r + s = n \Rightarrow q$ non dégénérée.
- $s = 0 \Rightarrow q$ positive.
- $r = 0 \Rightarrow q$ négative.
- Si la signature est $(n, 0)$ alors la forme est définie positive.
- Si la signature est $(0, n)$ alors la forme est définie négative.