Formes hermitiennes
et espaces hermitiens

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{C}$-e.v.

1. Formes hermitiennes

Définition 1.1

Soit F un $\mathbb{C}$-e.v. On dit qu'une application $f : E \to F$ est semilinéaire (ou antilinéaire) si et seulement si :
i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in E.$
ii) $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall x \in E.$

Remarques 1.2

Une forme semilinéaire est une application semilinéaire d'un $\mathbb{C}$-e.v. dans $\mathbb{C}$.

Exemples 1.3

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $z \mapsto \bar{z}$
  On a bien :
  # $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-e.v.
  # $f(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = f(x) + f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{C}$
  # $f(\lambda x) = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda} \times \bar{x} = \bar{\lambda} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall x \in \mathbb{C}$.
- $f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$
  $P \mapsto \overline{P(z_0)}$ où $z_0 \in \mathbb{C}$
  On a bien :
  # $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{C}$-e.v.
  # $f(P+Q) = \overline{(P+Q)(z_0)} = \overline{P(z_0) + Q(z_0)} = \overline{P(z_0)} + \overline{Q(z_0)}$
  $= f(P) + f(Q) \quad \forall P,Q \in \mathbb{C}[X]$
  # $f(\lambda P) = \overline{(\lambda P)(z_0)} = \overline{\lambda P(z_0)} = \bar{\lambda} \times \overline{P(z_0)} = \bar{\lambda} f(P) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall P \in \mathbb{C}[X]$.

Propriété 1.4

Soit $f : E \to F$ une application semilinéaire où F est un $\mathbb{C}$-e.v.
$\operatorname{Ker} f$ est un s.e.v de E.
$\operatorname{Im} f = f(E)$ est un s.e.v. de F.

Démonstration

- $\forall x \in E, \quad f(x) = f(x + 0_E) = f(x) + f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_F.$
  Donc $\operatorname{Ker} f \neq \varnothing$ et $\operatorname{Im} f \neq \varnothing$.

- $\forall x,y\in \mathrm{Ker} f$ et $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $f(\lambda x+\mu y) = f(\lambda x)+f(\mu y) = \bar{\lambda} f(x)+\bar{\mu} f(y) = 0$ donc $\lambda x+\mu y\in \mathrm{Ker} f$.
- $\forall z,t\in f(E)$ et $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{C}$
  $\exists x,y\in E\ /\ f(x) = z$ et $f(y) = t$
  $\lambda z + \mu t = f(\bar{\lambda}x)+f(\bar{\mu}y) = f(\bar{\lambda}x+\bar{\mu}y)\in f(E)$ donc $\lambda z+\mu t\in f(E)$.

Propriété 1.5

Soit F un $\mathbb{C}$-e.v.
L'ensemble des applications semilinéaires de E dans F (muni de la somme usuelles des fonctions et de la multiplication usuelle des fonctions par un scalaire) est un $\mathbb{C}$-e.v noté $\mathscr{L}$'(E,F) (à ne pas confondre avec l'ensemble $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E,F)$).

Démonstration

A faire à titre d'exercice (10 propriétés à vérifier)
En particulier : $f + g\in \mathscr{L}'(E,F)$ $\quad \forall f,g\in \mathscr{L}'(E,F)$
$\lambda f\in \mathscr{L}'(E,F)$ $\quad \forall \lambda\in\mathbb{C}$ et $\forall f\in \mathscr{L}'(E,F)$
$x \mapsto 0_F \in \mathscr{L}'(E,F)$

Définition 1.6

On dit qu'une application $f : E\times E \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire sur E si et seulement si :
i) f est linéaire par rapport à la première variable
ii) f est semilinéaire par rapport à la deuxième variable
C'est-à-dire : $f(x+x',y) = f(x,y) + f(x',y)$ $\quad \forall x,x',y\in E$.
$f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$ $\quad \forall \lambda\in\mathbb{C}$ et $\forall x,y\in E$.
$f(x,y+y') = f(x,y) + f(x,y')$ $\quad \forall x,y,y'\in E$.
$f(x,\lambda y) = \bar{\lambda} f(x,y)$ $\quad \forall \lambda\in\mathbb{C}$ et $\forall x,y\in E$.

Remarque 1.7

Pour la définition d'une forme sesquilinéaire, on rencontre parfois dans la littérature :
i) f est linéaire par rapport à la deuxième variable.
ii) f est semilinéaire par rapport à la première variable

Définition 1.8

On dit qu'une forme sesquilinéaire f sur E est une forme hermitienne sur E ssi $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$ $\forall x,y\in E$.

Exemples 1.9

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
  $(z_1,z_2) \mapsto z_1\overline{z_2}$

  \# $\forall \lambda\in\mathbb{C}$ et $\forall z_1,z_2,z_1',z_2'\in E$, on a :
  $f(z_1 + z_1',z_2) = (z_1 + z_1')\overline{z_2} = z_1\overline{z_2} + z_1'\overline{z_2} = f(z_1,z_2) + f(z_1',z_2)$
  $f(\lambda z_1,z_2) = (\lambda z_1)\overline{z_2} = \lambda z_1\overline{z_2} = \lambda f(z_1,z_2)$
  $f(z_1,z_2 + z_2') = z_1\left(\overline{z_2 + z_2'}\right) = z_1\left(\overline{z_2} + \overline{z_2'}\right) = z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_2'} = f(z_1,z_2) + f(z_1,z_2')$
  $f(z_1,\lambda z_2) = z_1\overline{\lambda z_2} = z_1\bar{\lambda}\overline{z_2} = \bar{\lambda} f(z_1,z_2)$ donc f est une forme sesquilinéaire.
  \# $\forall z_1,z_2\in E$, on a $f(z_2,z_1) = z_2\overline{z_1} = \overline{\overline{z_2}z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{f(z_1,z_2)}$ donc f est une forme hermitienne.

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
  $(z_1,z_2) \mapsto iz_1\overline{z_2}$

  # On vérifie de la même façon que f est une forme sesquilinéaire.
  # Mais $\forall z_1,z_2 \in E,\ f(z_2,z_1) = iz_2\overline{z_1}$ et $\overline{f(z_1,z_2)} = \overline{iz_1\overline{z_2}} = \overline{iz_1}\overline{\overline{z_2}} = -iz_2\overline{z_1}$
  Donc f n'est pas une forme hermitienne.

Remarques 1.10

- Pour montrer qu'une application est une forme hermitienne, de la même façon que pour une forme bilinéaire symétrique, il suffit de vérifier la linéarité par rapport à la première variable et vérifier l'égalité : $f(y,x) = \overline{f(x,y)}\ \ \forall x,y\in E$.
  Car alors, $\forall \lambda\in\mathbb{C}$ et $\forall x,y,y'\in E$, on a :
  # $f(x,y+y') = \overline{f(y+y',x)} = \overline{f(y,x)+f(y',x)} = \overline{f(y,x)} + \overline{f(y',x)} = f(x,y) + f(x,y')$
  # $f(x,\lambda y) = \overline{f(\lambda y,x)} = \overline{\lambda f(y,x)} = \overline{\lambda}\,\overline{f(y,x)} = \overline{\lambda} f(x,y)$
- Rappel : Si $K'\subset K$, alors E K-e.v. $\Rightarrow$ E K'-e.v.
  En particulier, un $\mathbb{C}$-e.v. est un $\mathbb{R}$-e.v.
  Si l'on considère une forme bilinéaire sur un e.v. réel, on peut remarquer qu'elle vérifie toutes les conditions des formes sesquilinéaires.
- La notion de formes hermitiennes est donc à relier avec la notion de forme bilinéaire symétrique et on peut considérer celle-ci comme une extension des formes bilinéaires symétriques.

Propriété 1.11

L'ensemble des formes sesquilinéaires sur un e.v. E, muni de la somme usuelle des fonctions et de la multiplication usuelle des fonctions par un scalaire, est un $\mathbb{C}$-e.v.
L'ensemble des formes hermitiennes sur un e.v. E, muni des mêmes lois que précédemment, est un $\mathbb{R}$-e.v. et, si $E \neq \{0\}$, alors ce n'est pas un $\mathbb{C}$-e.v.

Démonstration

A faire à titre d'exercice.

Propriété 1.12

Soit f une forme sesquilinéaire sur E.
Alors, $\forall x,y\in E,\ 4f(x,y) = f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) + i\,f(x+iy,x+iy) - i\,f(x-iy,x-iy)$.

Démonstration

$$\begin{aligned}\forall x,y\in E,\ & f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) + i\,f(x+iy,x+iy) - i\,f(x-iy,x-iy) \\ &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) \quad - f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) - f(y,y) \\ &\quad + i\,f(x,x) + f(x,y) - f(y,x) + i\,f(y,y) \quad - i\,f(x,x) + f(x,y) - f(y,x) - i\,f(y,y) \\ &= 4f(x,y).\end{aligned}$$

Définition 1.13

Soit f une forme hermitienne sur E.
On appelle forme quadratique complexe associée à f et on note q_f ou Q_f l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie par : $q_f(x) = f(x,x)\quad \forall x\in E$.

Remarques 1.14

- La propriété 1.12 devient donc :
  $4f(x,y) = q_f(x+y) - q_f(x-y) + i\,q_f(x+i\,y) - i\,q_f(x-i\,y)$.
- On a : $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $q_f(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda x) = \lambda\bar{\lambda} f(x,x)$
  $= |\lambda|^2 q_f(x)$.

Propriété 1.15

L'application qui, à une forme hermitienne, associe sa forme quadratique complexe associée est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v.

Démonstration

A faire à titre d'exercice.

Propriété 1.16

Soit f une forme sesquilinéaire sur E.
Alors f est une forme hermitienne si et seulement si $f(x,x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in E$.

Remarque 1.17

Si f est une forme hermitienne, alors q_f est donc une application de E dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

($\Rightarrow$) $\forall x \in E$, $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$.
($\Leftarrow$) $\forall x,y \in E$, $4f(x,y) = f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) + i\,f(x+iy,x+iy) - i\,f(x-iy,x-iy)$

$$4f(y,x) = f(y+x,y+x) - f(y-x,y-x) + i\,f(y+ix,y+ix) - i\,f(y-ix,y-ix)$$
$$= f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) + i\,f(i(x-iy),i(x-iy)) - i\,f(-i(x+iy),-i(x+iy))$$
$$= f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) - i\,f(x+iy,x+iy) + i\,f(x-iy,x-iy)$$

or $\forall x \in E$, $f(x,x) \in \mathbb{R}$.
Donc $4f(y,x) = \overline{4f(x,y)}$.
C'est-à-dire $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$.
D'où f est une forme hermitienne.

Définition 1.18

Soit f une forme hermitienne sur E et soit q_f sa forme quadratique associée.
On dit que f ou q_f sont positives si et seulement si $f(x,x) \in \mathbb{R}^+$ $\forall x \in E$.
On dit que f ou q_f sont définies si et seulement si $f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Propriété 1.19

Soit f une forme sesquilinéaire sur E.
Soient $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de $p \geq 2$ vecteurs de E et $(v_1, v_2, \ldots, v_q)$ une famille de $q \geq 2$ vecteurs de E.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_q$ des complexes.
On a : $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \overline{\mu_j} f(u_i, v_j)$.

Démonstration

Démonstration par récurrence.
Voir le cours sur les formes bilinéaires.

Remarque 1.20

On suppose que E est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ avec $\dim_{\mathbb{C}} E = n \geq 1$.
Soit $(e) = (e_1,e_2,e_3,....,e_n)$ une base de E.
Soit $x = \sum_{i=1,n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1,n} y_i e_i$ deux éléments de E. Les (x_i) et les (y_i) étant des éléments de $\mathbb{C}$.
Soit f une forme sesquilinéaire sur E.
On a $f(x,y) = f\left(\sum_{i=1,n} x_i e_i, \sum_{j=1,n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1,n}\sum_{j=1,n} x_i \overline{y_j}\, f(e_i, e_j)$.
f est donc entièrement déterminée par les $f(e_i,e_j)$.
Si on pose $A = \mathscr{M}_e(f) = (f(e_i,e_j))_{i=1,n \text{ et } j=1,n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$, on a $f(x,y) = {}^tXA\overline{Y}$.
Si, de plus, f est une forme hermitienne, on a $f(e_j,e_i) = \overline{f(e_i, e_j)}$.
C'est-à-dire ${}^tA = \overline{A}$.

Définition 1.21

On appelle matrice hermitienne, tout élément A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que ${}^t\overline{A} = A$.

Exemple 1.22

On suppose que E est de dimension 2 et que $(e) = (e_1,e_2)$ est une base de E.
On suppose que $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ sont deux éléments de E avec x_1, x_2, y_1 et y_2 des complexes.
Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix}$ est hermitienne et c'est la matrice dans la base (e) de l'application :
$f(x,y) = {}^tXA\overline{Y} = x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} - 4x_2\overline{y_2}$.

Remarques 1.23

- Une matrice hermitienne dont tous les coefficients sont réels est une matrice symétrique.
  On a donc pour une matrice : (symétrique réelle) $\Rightarrow$ (hermitienne).
- Les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont des réels.
  Mais ce n'est pas une condition suffisante. On peut remarquer que, par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,
  on a bien que $f(e_1,e_1)$ et $f(e_2,e_2)$ sont des réels.
  Mais $f(e_1+e_2,e_1+e_2) = (1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 1)\begin{pmatrix} 1+i \\ 5 \end{pmatrix} = 6 + i \notin \mathbb{R}$
- Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n, alors il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-e.v. entre l'espace des formes sesquilinéaires sur E et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n, alors il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v. entre les matrices hermitiennes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et les formes hermitiennes sur E.

Propriété 1.24 (Effet d'un changement de base)

On suppose $\dim_{\mathbb{C}} E = n \geq 1$. Soient $(e) = (e_1,e_2,e_3,....,e_n)$ et $(e') = (e'_1,e'_2,e'_3,....,e'_n)$ deux bases de E.
Soit S la matrice de passage de (e) à (e').
Soit f une forme sesquilinéaire sur E.
On pose $A = \mathscr{M}_e(f) = (f(e_i,e_j))_{i=1,n \text{ et } j=1,n}$ et $\tilde{A} = \mathscr{M}_{e'}(f) = (f(e'_i,e'_j))_{i=1,n \text{ et } j=1,n}$.
On a $\tilde{A} = {}^tSA\bar{S}$.

Démonstration

Soient x et y deux éléments de E.
Soient X et $Y \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées respectives de x et y dans la base (e).
Soient X' et $Y' \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées respectives de x et y dans la base (e').
Nous savons que $X = SX'$ et $Y = SY'$.
Nous avons $f(x,y) = {}^tXA\bar{Y} = {}^t(SX')A\overline{SY'} = {}^tX'{}^tSA\bar{S}\overline{Y'} = {}^tX'[{}^tSA\bar{S}]\overline{Y'}$.
Or $f(x,y) = {}^tX'\tilde{A}\overline{Y'}$.
Donc $\tilde{A} = {}^tSA\bar{S}$ car l'égalité est vraie pour tout couple (x,y).

Définition 1.25

Soit f une forme hermitienne sur E de dimension finie sur $\mathbb{C}$.
On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ le rang de la matrice associé à f dans n’importe quelle base de E.
On appelle discriminant de f dans une base (b) de E le déterminant de la matrice de f dans la base (b).

Justification

$\mathrm{rg}(f)$ est indépendant de la base car $\tilde{A} = {}^tSA\bar{S}$.
Les matrices ${}^tS$ et $\bar{S}$ peuvent être considérées comme les matrices d'une bijection.
Elles ne changent pas la dimension de l’espace d’arrivée et donc elle ne change pas non plus le rang.

Propriété 1.26

Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont toutes réelles.

Démonstration

Soit A une matrice hermitienne d’ordre n.
Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A de valeur propre λ_0.
On a donc $AX_0 = \lambda_0 X_0$ avec $X_0 \neq 0$.
Mais A peut être aussi considérée comme la matrice d'une forme hermitienne f sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans la base canonique (e) de $\mathbb{C}^n$.
Soit $x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{C}^n$.
Le vecteur x_0 a pour coordonnées X_0 dans (e).
$\mathbb{R} \ni f(\overline{x_0},\overline{x_0}) = {}^t\overline{X_0}A\overline{\overline{X_0}} = {}^t\overline{X_0}AX_0 = {}^t\overline{X_0}\lambda_0 X_0 = \lambda_0 {}^t\overline{X_0}X_0 = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}x_i\right) = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)$
Or $\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \in \mathbb{R}^*$ car $X_0 \neq 0$, donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Conséquence 1.27

Les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles.
En effet, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A$.
On a $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et ${}^tA = A = \overline{A}$ car A est une matrice réelle.
Donc A peut être considérée comme une matrice hermitienne.

Propriété 1.28

Soit f une forme sesquilinéaire sur E de dimension finie $\dim_{\mathbb{C}} E = n (\in \mathbb{N}^*)$.
Soit $(e) = (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ une base de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(f(x,y) = 0 \ \ \forall x \in E) \Rightarrow y = 0$
- (ii) $(f(x,y) = 0 \ \ \forall y \in E) \Rightarrow x = 0$
- (iii) $\det \mathscr{M}_e(f) \neq 0$
- (iv) $\forall \varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C}), \exists! y_0 \in E \ / \ \varphi(x) = f(x, y_0) \ \ \forall x \in E$

Lorsque l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que f est non dégénérée.

Démonstration

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow {}^tXAY = 0$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ $\quad (f(x,y) = 0 \ \ \forall x \in E) \Rightarrow y = 0$
$\Leftrightarrow \quad {}^tXAY = 0 \ \ \forall X \in \mathbb{C}^n \Rightarrow Y = 0$
$\Leftrightarrow \quad AY = 0 \Rightarrow Y = 0$
$\Leftrightarrow \quad \det A \neq 0.$

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ $\quad (f(x,y) = 0 \ \ \forall y \in E) \Rightarrow x = 0$
$\Leftrightarrow \quad {}^tXAY = 0 \ \ \forall Y \in \mathbb{C}^n \Rightarrow X = 0$
$\Leftrightarrow \quad {}^tXA = 0 \Rightarrow X = 0$
$\Leftrightarrow \quad \det A \neq 0.$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ $\quad$ Soit $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$, soit $M = \mathscr{M}_e(\varphi)$.
$\varphi(x) = MX = {}^tX\,{}^tM$ et $f(x,y) = {}^tXA\overline{Y}$
$f(x,y) = \varphi(x) \ \ \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad {}^tXA\overline{Y} = {}^tX\,{}^tM \quad \forall X \in \mathbb{C}^n$
$\Rightarrow \quad A\overline{Y} = {}^tM$
$\Rightarrow \quad Y_0 = \overline{A^{-1} \times {}^tM}$ car A inversible.
Donc pour tout $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$, on pose $y_0 = A^{-1} \times {}^tM$, et on obtient le résultat.

$(iv) \Rightarrow (i)$ $\quad$ Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}$
$\quad x \mapsto 0$
On a $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$ donc $\exists! y_0 \in E \ / \ \varphi(x) = f(x, y_0) \ \ \forall x \in E$.
Or $f(x,0) = 0 \ \ \forall x \in E$ donc $y_0 = 0$.

Remarques 1.29

- Avec les notations de la propriété, on suppose que $(e') = (e_1', e_2', e_3', \ldots, e_n')$ est une autre base de E.
  Soit S la matrice de passage de (e) à (e').
  On pose $A = \mathscr{M}_e(f)$ et $A' = \mathscr{M}_{e'}(f)$, on a $A' = {}^tS \times A \times \overline{S}$.
  Donc $\quad \det A' = \det {}^tS \times \det A \times \det \overline{S} = \det S \times \det A \times \overline{\det S}$
  Or $\det S \neq 0$ car S inversible.
  La relation (iii) ne dépend donc pas de la base choisie.
- Si E est de dimension infinie, seules les propriétés (1) et (2) <u>seraient</u> utilisables.
  Pas de définition dans ce cas.

Exemple 1.30

Soit E un e.v. complexe de dimension 2 et f la forme sesquilinéaire sur E définie par

$$f(x,y) = 3x_1\overline{y_1} + (1+i)x_2\overline{y_2} - ix_1\overline{y_2} + (2-i)x_2\overline{y_1}$$

On a $\mathscr{M}_e(f) = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$.

Donc $\det \mathscr{M}_e(f) = 3\times(1+i) + i(2-i) = 3+3i+2i+1 = 4+5i \neq 0$

D'où f est non dégénérée.

Définition 1.31

La notion d'orthogonalité par rapport à une forme hermitienne f dans un espace vectoriel complexe E est la même que pour une forme bilinéaire symétrique. Nous avons donc :

- $x,y\in E$ sont orthogonaux (relativement à f) $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = 0$
- $F,G \subset E$ sont orthogonaux (relativement à f) $\Leftrightarrow$ $f(x,y) = 0 \quad \forall x\in F$ et $\forall y\in G$
- Soit $M \subset E$, on appelle orthogonal de M (relativement à f) et on note $M^\perp$ l'ensemble défini par $M^\perp = \{x\in E \,/\, f(x,y) = 0,\ \forall y\in M\}$.

Propriété 1.32

Soit f une forme hermitienne sur E et $A,B\in\mathscr{P}(E)$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) A et B sont orthogonaux

ii) $B \subset A^\perp$

iii) $A \subset B^\perp$

Propriété 1.33

Soit f une forme hermitienne sur E.
Si $F,G \subset E$ sont orthogonaux (relativement à f) alors toute combinaison linéaire d'éléments de F est orthogonale à toute combinaison linéaire d'éléments de G.

Conséquence 1.34

$\forall F \subset E,\ F^\perp$ est un s.e.v. de E. C'est-à-dire $F^\perp = \mathrm{Vect}(F^\perp)$.

Rappels 1.35

a. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ b. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Propriété 1.36

Soit f une forme hermitienne sur E.
Soit $(b) = (b_1,b_2,b_3,....,b_p)$ une base d'un s.e.v. F de E.
On a : $x\in F^\perp \Leftrightarrow f(x,b_i) = 0 \quad \forall i = 1,p$.

Propriété 1.37 (Théorème de Pythagore)

Soit f une forme hermitienne sur E.
Soit $(x_1,x_2,x_3,....,x_p)$ une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, alors

$$f(x_1+x_2+x_3+ \ldots + x_p, x_1+x_2+x_3+ \ldots + x_p) = f(x_1,x_1) + f(x_2,x_2) + \ldots + f(x_p,x_p).$$

Définition 1.38

Soit f une forme hermitienne sur E.
On appelle noyau de f et on note $N(f)$ ou $E^{\perp}$ l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à E tout entier c'est-à-dire $E^{\perp} = N(f) = \{y \in E \,/\, f(x,y) = 0 \;\; \forall x \in E\}$.

Propriété 1.39

Soit f une forme hermitienne sur E.
On a : $E^{\perp} \neq \{0\} \iff f$ est dégénérée.

Définition 1.40

Soit f une forme hermitienne sur E.
On dit qu'un élément x de E est isotrope si et seulement si $f(x,x) = 0$.
On dit que F s.e.v de E est isotrope si et seulement si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$.

Propriété 1.41

Soit f une forme hermitienne sur E (de dimension finie).
Soit M un s.e.v. de E de dimension finie.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $M \cap M^{\perp} = \{0\}$
(ii) La restriction de f à $M \times M$ est non dégénérée.
(iii) $E = M \oplus M^{\perp}$

On a alors : $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Propriété 1.42

Soit f une forme hermitienne sur E de dimension finie.
Alors il existe une base orthogonale relativement à f.

Remarque 1.43

Dans une telle base $(b) = (b_1,b_2,b_3,....,b_n)$, la matrice de f est donc de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ où $a_i \in \mathbb{R}$.

Et, si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i b_i$, la forme quadratique q associée à f est $q(x) = a_1|x_1|^2 + a_2|x_2|^2 + ... + a_p|x_p|^2$.

Propriété 1.44 (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit f une forme hermitienne sur E de dimension n finie.
Pour toute base $(b) = (b_1,b_2,b_3,....,b_n)$ orthogonale pour f, le nombre r d'indices i tels que $f(b_i,b_i) > 0$ et le nombre s d'indices j tels que $f(b_j,b_j) < 0$ sont des invariants de f.
Le couple (r,s) est appelé la signature de f.

Définition 1.45

On dit que deux formes hermitiennes h_1 et h_2 sont équivalentes sur E et on écrit $h_1 \sim h_2$ si et seulement si il existe un automorphisme u de E tel que : $h_2(x,y) = h_1(u(x),u(y)) \; \forall x,y \in E$.

Propriété 1.46

Deux formes hermitiennes sur un e.v. de dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.

Démonstration

Avec les notations de la définition 1.44, soit M la matrice associée à u dans une base (e) de E.
Or u est une bijection, donc M est inversible.
La matrice M peut être aussi considérée comme une matrice de changement de base.

Soient A_1 et A_2 les matrices respectives de h_1 et h_2 dans la base (e).

$$
\begin{array}{lll}
 & h_2(x,y) = h_1(u(x),u(y)) & \forall x,y \in E \\
\Leftrightarrow & {}^tXA_2\overline{Y} = {}^t(MX)A_1\left(\overline{MY}\right) & \forall X,Y \in \mathbb{C}^n \\
\Leftrightarrow & {}^tXA_2\overline{Y} = {}^tX\,{}^tMA_1\overline{M}\overline{Y} & \forall X,Y \in \mathbb{C}^n \\
\Leftrightarrow & A_2 = {}^tMA_1\overline{M} & \\
\Leftrightarrow & A_2 \text{ est obtenue de } A_1 \text{ par un changement de base.} &
\end{array}
$$

2. Espaces hermitiens

Définition 2.1

On appelle produit scalaire complexe (ou hermitien) sur E toute forme hermitienne f sur E définie et positive. On note généralement un produit scalaire complexe sur un $\mathbb{C}$-e.v. E de la même façon qu'un produit scalaire réel c'est-à-dire $<x,y>$ ou $(x|y)$ pour x et $y \in E$.

Les propriétés caractérisant un produit scalaire sur un e.v. complexe E sont donc :

- $\langle \alpha x + \beta x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x', y\rangle$ $\quad \forall x,x',y \in E,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $\quad \forall x,y \in E$
- $\langle x, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
- $\langle x, x\rangle \geq 0$ $\quad \forall x \in E$

Exemples 2.2

- $$\begin{array}{rl} f : & \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \\ & (z_1,z_2) \mapsto z_1\overline{z_2} \end{array}$$
- $$\begin{array}{rl} \varphi : & \mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C} \\ & (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\overline{Q(t)}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Définition 2.3

L'application f définie par $\begin{array}{rl} f : & \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\ & (x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} \end{array}$ où $x = (x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ $x_i \in \mathbb{C}$ pour tout i, et $y = (y_1,y_2,y_3,...,y_n)$ $y_i \in \mathbb{C}$ pour tout i.

est appelé produit scalaire (hermitien) canonique sur $\mathbb{C}^n$.

Remarque 2.4

Une forme hermitienne de signature $(n,0)$ sur un e.v. de dimension n (sur $\mathbb{C}$) est un produit scalaire.

Définition 2.5

On appelle espace préhilbertien complexe tout e.v. complexe muni d'un produit scalaire complexe.
On appelle espace hermitien tout espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Exemples 2.6

Voir exemples 2.2.

Propriété 2.7

Soit f une forme hermitienne sur E.
Si f est positive, alors : f non dégénérée $\Leftrightarrow$ f définie.

Démonstration

- Nous savons déjà que f définie $\Rightarrow$ f non dégénérée.
- Supposons f non dégénérée et f positive et soit $x\in E$ tel que $f(x,x) = 0$

  $\forall y\in E,\ \forall \lambda\in\mathbb{C},\ f(y+\lambda x, y+\lambda x) \geq 0.$

  $f(y,y)+f(y,\lambda x)+f(\lambda x,y) \geq 0.$

  $f(y,y)+\overline{\lambda f(x,y)}+\lambda f(x,y) \geq 0.$

  $f(y,y)+2\mathrm{Re}(\lambda f(x,y)) \geq 0.$

  \# Si $\exists y\in E$ / $f(x,y) \neq 0$, et si on prend $\lambda_0 = -\dfrac{f(y,x)f(y,y)}{|f(x,y)|^2}$, on obtient $-f(y,y) \geq 0$.
  C'est-à-dire $f(y,y) = 0$ car f est positive.
  L'égalité devient $2\mathrm{Re}(\lambda f(x,y)) \geq 0$ et elle doit être vraie pour tout réel λ.
  On doit donc avoir $f(x,y) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse dans ce cas.

  \# On a donc $f(x,y) = 0\ \forall y\in E$, c'est-à-dire $x\in E^{\perp}$ or f est non dégénérée donc $x = 0$.

Propriété 2.8

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
On induit une structure d'espace hermitien sur tout s.e.v. F de E en considérant la restriction de $<>$ à F.

Propriété 2.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E,<>)$ un espace préhilbertien complexe. On a : $\forall x,y\in E$, $|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}$.
L'égalité est obtenue lorsque x et y sont linéairement dépendants.

Démonstration

Inégalité $\forall x,y\in E$ et $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}\langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle &= |\lambda|^2\langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \overline{\lambda}\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\ &= |\lambda|^2\langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \overline{\lambda\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle\\ &= |\lambda|^2\langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle x,y\rangle) + \langle y,y\rangle.\end{aligned}$$

On suppose $\langle x,y\rangle = re^{i\theta}$ avec $r = |\langle x,y\rangle|$.
L'égalité doit être vraie pour tous les complexes λ de la forme $\lambda = te^{-i\theta}$ où $t\in\mathbb{R}$.
On obtient donc pour chaque couple (x,y) une équation en t réel.
C'est-à-dire $\langle te^{-i\theta}x+y, te^{-i\theta}x+y\rangle = |te^{-i\theta}|^2\langle x,x\rangle + 2rt + \langle y,y\rangle = t^2\langle x,x\rangle + 2rt + \langle y,y\rangle$.
Si $x = 0$, l'égalité est vraie.
Si $x \neq 0$, le discriminant doit être négatif ou nul, ce qui donne : $4|\langle x,y\rangle|^2 \leq 4\langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle$.

Egalité :

- Supposons $y = \lambda x$ $\quad |\langle x, \lambda x\rangle| = \left|\bar{\lambda}\langle x, x\rangle\right| = |\lambda|\langle x, x\rangle$
$\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \times \left(\lambda\bar{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \times \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\langle x, x\rangle$
- Supposons que l'on ait l'égalité.
Si $x = 0$, alors x et y sont liés.
Si $x \neq 0$, le discriminant est nul et l'on a donc une racine double pour t.
Ce qui nécessite $\langle te^{-i\theta}x + y, te^{-i\theta}x + y\rangle = 0$ c'est-à-dire $te^{-i\theta}x + y = 0$.

Propriété 2.10

Soit $(E,<>)$ un espace préhilbertien complexe.
L'application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui, à tout x de E, associe $<x,x>^{1/2}$ est une norme qui est notée $\|x\|$.
On a : (i) $\quad \|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
(ii) $\quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad \forall x\in E, \forall \lambda\in \mathbb{C}$.
(iii) $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y\in E$.

Démonstration

(i) Le produit scalaire est forme sesquilinéaire définie.
(ii) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda\bar{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \times \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\,\|x\|$.
(iii) Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski.
$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2$
$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
Or $2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leq 2|\langle x, y\rangle|$ et $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$ donc $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2$.

Remarques 2.11

- Toutes les normes ne sont pas forcement issues d'un produit scalaire.
- On a l'égalité dans (iii) lorsque x et y sont positivement liés :
  # Supposons $y = \lambda x$ avec $\lambda\in \mathbb{R}^+$.
  $\|x + y\| = \|x + \lambda x\| = \|(1 + \lambda)x\| = |1 + \lambda|\,\|x\| = (1 + \lambda)\|x\|$
  $\|x\| + \|y\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + |\lambda|\,\|x\| = \|x\| + \lambda\|x\| = (1 + \lambda)\|x\|$
  # On a l'égalité lorsque $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ et x,y linéairement dépendants c'est-à-dire $y = \lambda x$.
  Or $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \Rightarrow \langle x, y\rangle\in \mathbb{R}^+$ et on a $\langle x, y\rangle = \lambda\|x\|$ d'où $\lambda\in \mathbb{R}^+$.

Propriété 2.12

Tout espace hermitien $(E,<>)$ (de dimension finie) admet une base orthonormale et, dans une telle base, le produit scalaire hermitien est le produit scalaire canonique c'est-à-dire : si $(b) = (b_1,b_2,b_3,....,b_n)$ est une base orthonormale, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j$, alors $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = {}^tX\bar{Y}$ et $<x,x>^{1/2} = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

Remarques 2.13

- $< \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} x_j b_j > = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ n'est qu'une reformulation du théorème de Pythagore.
- Si f un produit scalaire complexe sur E un e.v. sur $\mathbb{C}$, alors f est non dégénérée donc :
  Pour tout s.e.v. M de E de dim finie, on a $E = M \oplus M^{\perp}$.
- Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est encore utilisable.
- Dans le cas d'un espace préhilbertien complexe E, tout s.e.v. de E de dimension finie admet une base orthonormale.

Rappel 2.14 (Identité de polarisation)

$4 <x,y> = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$

3. Endomorphisme adjoint

Rappel 3.1

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
$\forall \varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$, $\exists ! y_0 \in E \;/\; \varphi(x) = <x,y_0> \;\; \forall x \in E$
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ et soit $y \in E$.
L'application $x \mapsto <u(x),y>$ est une forme linéaire
Donc $\exists ! y_0 \in E \;/\; <u(x),y> = <x,y_0> \;\; \forall x \in E$.
Que se passe-t-il, si à la place de prendre y, on prend $y + y'$ où λy?
$\exists ! y_0 \in E \;/\; <u(x),y> = <x,y_0> \;\; \forall x \in E$ et $\exists ! y'_0 \in E \;/\; <u(x),y'> = <x,y'_0> \;\; \forall x \in E$
On a donc : $<u(x),y + y'> = <u(x),y'> + <u(x),y'> = <x,y_0> + <x,y'_0> = <x,y_0 + y'_0>$
$<u(x),\lambda y> = \bar{\lambda} <u(x),y> = \bar{\lambda} <x,y_0> \; = <x,\lambda y_0>$
D'où l'application $y \mapsto y_0$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Définition-propriété 3.2

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
$\forall u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$, $\exists ! u^* \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E) \;/\; \forall x,y \in E \;\;\; <u(x),y> = <x,u^*(y)>$.
u^* est appelé opérateur adjoint à u.

Propriétés 3.3

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien et soient $u,u_1,u_2 \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
a. $(u_1 + u_2)^* = u_1^* + u_2^*$
b. $(u_1 \text{ o } u_2)^* = u_2^* \text{ o } u_1^*$
c. $(\alpha u)^* = \bar{\alpha} u^*$
d. $(u^*)^* = u$
e. $(\mathrm{Id})^* = \mathrm{Id}$
f. $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

Démonstration

a. b. d. e. voir le chapitre "Espaces euclidiens".
c. $\forall x,y \in E$, $<(\alpha u)(x),y> = <\alpha u(x),y)>$
$= \alpha <u(x),y>$
$= \alpha <x,u^*(y)> = <x,\bar{\alpha} u^*(y)>$
f. $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}^* = (f \text{ o } f^{-1})^* = (f^{-1})^* \text{ o } f^*$.
$\mathrm{Id} = \mathrm{Id}^* = (f^{-1} \text{o } f)^* = f^* \text{ o } (f^{-1})^*$.

Propriété 3.4

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien et soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$.
a. $\mathrm{Ker} f^* = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$
b. $\mathrm{Im} f^* = (\mathrm{Ker} f)^{\perp}$

Démonstration

a. $x \in \operatorname{Ker} f^* \Leftrightarrow f^*(x) = 0$
$\Leftrightarrow \langle f^*(x), y\rangle = 0\ \forall y \in E$
$\Leftrightarrow \langle x, (f^*)^*(y)\rangle = 0\ \forall y \in E$
$\Leftrightarrow \langle x, f(y)\rangle = 0\ \forall y \in E$
$\Leftrightarrow \langle x, z\rangle = 0\ \forall z \in \operatorname{Im} f$
$\Leftrightarrow x \in (\operatorname{Im} f)^\perp$

b. Idem en partant de $x \in \operatorname{Ker} f$.

Propriété 3.5

Soit $(E, <>)$ un espace hermitien, soit M un s.e.v. de E et soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$.
Si M est stable par u alors $M^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration

Voir espace euclidien.

Remarque 3.6

Soit $(E, <>)$ un espace hermitien et soit (e) une base de E et soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$.
Si $A = \mathscr{M}_e(<>)$, $M = \mathscr{M}_e(u)$ et $M' = \mathscr{M}_e(u^*)$, pour tous éléments x et y de E de coordonnées respectives X et Y on a : $\langle x, y\rangle = {}^tXA\overline{Y}$, $u(x) = MX$ et $u^*(y) = M'Y$.
On obtient ${}^tX{}^tMA\overline{Y} = {}^tXA\overline{M'}\,\overline{Y}$.
Donc ${}^tMA = A\overline{M'}$, c'est-à-dire $M' = \overline{A^{-1}{}^tMA}$.

Définition 3.7

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\overline{{}^tM} = M^*$ est appelée matrice adjointe à M ou transjuguée de M.

Propriété 3.8

Soit $(E, <>)$ un espace hermitien, soit $(b) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ une base orthonormale de E et soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$.
Alors $\mathscr{M}_b(u^*) = [\mathscr{M}_b(u)]^*$.

Propriété 3.9

Soit $(E, <>)$ un espace hermitien et soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$.
On a $\operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u$ et $\det u^* = \overline{\det u}$.

Propriété 3.10

Un endomorphisme et son adjoint ont des polynômes caractéristiques conjugués.

Démonstration

$$\tilde{\pi}_{f^*}(\lambda) = \underline{\det(f^* - \lambda \mathrm{Id})} = \det(f^* - \lambda \mathrm{Id}^*) = \det(f^* - (\overline{\lambda}\mathrm{Id})^*) = \det((f - \overline{\lambda}\mathrm{Id})^*)$$
$$= \overline{\det(f - \overline{\lambda}\mathrm{Id})} = \overline{\tilde{\pi}_f(\lambda)}\ .$$

Définition 3.11

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
Soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ et soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On dit que : u est normal si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u$.
u est autoadjoint si et seulement si $u = u^*$.
u est unitaire si et seulement si $u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$ c'est-à-dire $u^* = u^{-1}$.
M est normal si et seulement si $MM^* = M^*M$.
M est hermitienne si et seulement si $M^* = M$.
M est unitaire si et seulement si $MM^* = M^*M = I_n$ c'est-à-dire $M^* = M^{-1}$.

Remarques 3.12

- u est autoadjoint = symétrique dans le cas réel.
  = hermitien dans le cas complexe.
- u est autoadjoint $\Rightarrow$ u est normal
  u est unitaire $\Rightarrow$ u est normal
- M est hermitienne $\Rightarrow$ M est normal
  M est symétrique $\Rightarrow$ M est normal
  M est antisymétrique $\Rightarrow$ M est normal
  M est unitaire $\Rightarrow$ M est normal
  M est orthogonale $\Rightarrow$ M est normal

Propriété 3.13

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien et soit u un endomorphisme normal de E.
On a les propriétés suivantes :

a. $<u(x),u(y)> = <u^*(x),u^*(y)> \quad \forall x,y \in E$.
b. $\mathrm{Ker}\, u^* = \mathrm{Ker}\, u$.
c. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Ker}\,(u^* - \bar{\alpha}\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$.
d. Si x_0 est un vecteur propre de u de valeur propre λ_0 alors x_0 est une vecteur propre de u^* de valeur propre $\overline{\lambda_0}$.

Démonstration

a. $<u(x),u(y)> = <x,u^*(u(y))> = <x,(u^* \circ u)(y)>$
$= <x,(u \circ u^*)(y)> = \overline{<u(u^*(y)),x>}$
$= \overline{<u^*(y),u^*(x)>} = <u^*(x),u^*(y)>$.

b. $x \in \mathrm{Ker}\, u \Leftrightarrow u(x) = 0$
$\Leftrightarrow <u(x),u(x)> = 0$
$\Leftrightarrow <u^*(x),u^*(x)> = 0$
$\Leftrightarrow u^*(x) = 0$
$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, u^*$.

c. On a $(u - \alpha\mathrm{Id}_E)^* = u^* - \bar{\alpha}\mathrm{Id}_E$.
On vérifie que $u - \alpha\mathrm{Id}_E$ est normal.
$(u - \alpha\mathrm{Id}_E) \circ (u^* - \bar{\alpha}\mathrm{Id}_E) = u \circ u^* - \bar{\alpha}u - \alpha u^* + \alpha\bar{\alpha}\mathrm{Id}_E$
$(u^* - \bar{\alpha}\mathrm{Id}_E) \circ (u - \alpha\mathrm{Id}_E) = u^* \circ u - \alpha u^* - \bar{\alpha}u + \alpha\bar{\alpha}\mathrm{Id}_E$

d. $u(x_0) = \lambda_0 x_0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\mathrm{Id}_E)$
$\Leftrightarrow x_0 \in \mathrm{Ker}\,(u^* - \overline{\lambda_0}\mathrm{Id}_E)$
$\Leftrightarrow u^*(x_0) = \overline{\lambda_0}x_0$.

Propriété 3.14

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien et soit $f\in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ normal.
Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes de f sont orthogonaux.

Démonstration

On suppose : $f(u_1) = \lambda_1 u_1$ et $f(u_2) = \lambda_2 u_2$ avec λ_1, λ_2 deux complexes distincts et u_1, u_2 deux vecteurs non nuls de E.
On a : $\lambda_1 < u_1,u_2 > = < \lambda_1 u_1,u_2 > = < f(u_1),u_2 > = < u_1,f^*(u_2) > = < u_1,\overline{\lambda_2} u_2 > = \lambda_2 < u_1,u_2 >$
Donc $(\lambda_1 - \lambda_2) < u_1,u_2 > = 0$. C'est-à-dire $< u_1,u_2 > = 0$.

Propriété 3.15

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien et soit $u\in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ normal.
Il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Propriété 3.16

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
i) $u\in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ est unitaire.
ii) $< u(x), u(y) > = < x, y > \quad \forall x,y\in E$
iii) $< u(x), u(x) > = < x, x > \quad \forall x\in E$

Remarque 3.17

iii) $\Leftrightarrow$ *iii')* $\quad \|u(x)\| = \|x\| \quad \forall x\in E$

Démonstration

i) $\Rightarrow$ *ii)* Trivial
ii) $\Rightarrow$ *i)* Voir démonstration u orthogonale.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Trivial
iii) $\Rightarrow$ *ii)* $4 < x,y > = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$

$$\begin{aligned}4 < u(x), u(y) > &= \|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2 + i\|u(x)+iu(y)\|^2 - i\|u(x)-iu(y)\|^2 \\ &= \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 + i\|u(x+iy)\|^2 - i\|u(x-iy)\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\end{aligned}$$

Propriété 3.18

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien. Pour que $u\in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ soit unitaire, il faut et il suffit que l'image d'une base orthonormale par u soit orthonormale.

Démonstration

Soit $(e) = (e_1,e_2,e_3,...,e_n)$ une base orthonormale de E.
$(\Rightarrow)$ Si u unitaire, alors, $\forall x,y\in F$, $< u(x),u(y) > = < x,y >$. D'où $< u(e_i),u(e_j) > = < e_i,e_j > = \delta_{ij}$.
$(\Leftarrow)$ $(u(e_1),u(e_2),u(e_3),....,u(e_n))$ base orthonormale de E.
On suppose que $x = \sum_i x_i e_i$. On a donc $u(x) = \sum_i x_i\, u(e_i)$.
$$< u(x),u(x) > = \sum_i \sum_j x_i \overline{x}_j < u(e_i),u(e_j) > = \sum_i \sum_j x_i \overline{x}_j < e_i,e_j > = < x,x >$$

Propriété 3.19

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
Pour que $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ soit unitaire, il faut et il suffit que sa matrice dans une base orthonormale soit unitaire.

Démonstration

Soit $(e) = (e_1,e_2,e_3,...,e_n)$ une base orthonormale de E.

u unitaire $\Leftrightarrow u^* = u^{-1}$

$\Leftrightarrow \mathscr{M}_e(u^*) = \mathscr{M}_e(u^{-1})$

$\Leftrightarrow \mathscr{M}_e(u)^* = \mathscr{M}_e(u^{-1}) \Leftrightarrow \mathscr{M}_e(u)$ unitaire.

Propriété 3.20

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien et soit $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E)$ unitaire.
Alors $|\det u| = 1$.

Démonstration

$u^* \circ u = \mathrm{Id}_E \Rightarrow \det(u^* \circ u) = \det(\mathrm{Id}_E)$

$\Rightarrow \det(u^*)\det(u) = 1$

$\Rightarrow \overline{\det(u)}\det(u) = 1$

$\Rightarrow |\det u|^2 = 1.$

Propriété 3.21

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
L'ensemble $U(E)$ des endomorphismes unitaires muni de la loi de composition usuelle des fonctions vérifie

- La loi o est une loi de composition interne sur $O(E)$.
- La loi o est associative sur $O(E)$.
- La loi o admet un élément neutre dans $O(E)$.
- Tout élément de $O(E)$ admet un symétrique pour la loi o.

On dit que $(U(E),\mathrm{o})$ est un groupe non commutatif. Il est appelé groupe unitaire de E.

Démonstration

Soient $u_1,u_2 \in U(E)$.

- $\forall x,y \in E,\quad <(u_1 \circ u_2)(x),(u_1 \circ u_2)(y)>$
  $= <u_1(u_2(x)),u_1(u_2(y))>$
  $= <u_2(x),u_2(y)>$ car $u_1 \in U(E)$
  $= <x,y>$ car $u_2 \in U(E)$.

  Donc $u_1 \circ u_2 \in U(E)$.
- La loi o est associative.
- $\mathrm{Id}(E) \in U(E)$ donc $U(E) \neq \varnothing$
- $\forall x,y \in F,\quad <u_2^{-1}(x),u_2^{-1}(y)>$
  $= <u_2(u_2^{-1}(x)),u_2(u_2^{-1}(y))>$
  $= <(u_2 \circ u_2^{-1})(x),(u_2 \circ u_2^{-1})(y)>$
  $= <x,y>.$

  Donc $u_2^{-1} \in U(E)$.

Propriété 3.22

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
Soit $SU(E)$ L'ensemble des éléments u de $U(E)$ tels que $\det u = 1$.
$(SU(E),\mathrm{o})$ est un groupe appelé groupe spécial unitaire.

Justification

On a : $\det \mathrm{Id} = 1$,

$\det(u \mathrm{~o~} v) = \det(u) \times \det(v)$ et

$\det(u^{-1}) = [\det(u)]^{-1}$.

Propriété 3.23

Soit $(\mathbb{C}^n,<>)$ où $<>$ est le produit scalaire canonique et soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Les 5 propositions suivantes sont équivalentes :

	(1)	$M.M^* = I_n$
(1')	(2)	$M^*.M = I_n$
	(3)	M est inversible et $M^* = M^{-1}$
(2')	(4)	Les vecteurs colonnes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{C}^n$.
	(5)	Les vecteurs lignes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{C}^n$.

Remarques 3.24

- Pour vérifier qu'une matrice est unitaire, il suffit donc de vérifier l'une des 5 propriétés.
- La matrice de passage d'une base orthonormale à une autre est une matrice unitaire.

Démonstration

Soit $(e) = (e_1,e_2,e_3,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)
- (1') $\Leftrightarrow$ (4)

$M = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ $\quad M = (\bar{a}_{ji})_{i,j=1,n}$

$M^*.M = (\gamma_{ij})_{i,j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj}$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & \cdots & b_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \qquad M^* = \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \begin{array}{c} \overline{b_1} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{array}$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \qquad \begin{aligned} <b_i,b_j> &= <\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l> \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ki} \overline{a_{lj}} <e_i,e_j> \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \bar{a}_{kj} \\ &= \gamma_{ij} \end{aligned}$$

$M^*.M = I_n \Leftrightarrow <b_i,b_j> = \delta_{ij}$.

Corollaire 3.25

Le déterminant d'une matrice unitaire est de module 1.

Démonstration

$1 = \det I$
$\quad = \det M^* M$
$\quad = \det M^* \times \det M$
$\quad = \overline{\det M} \times \det M = |\det M|^2.$

Définition - corollaire 3.26

Soit $U(n)$ l'ensemble des matrices complexe unitaire carrées d'ordre n.
$(U(n),\times)$ est un groupe non commutatif appelé groupe unitaire d'ordre n.
$U(n)^+ = SU(n) = \{M \in U(n) \,/\, \det M = 1\}$ est un sous-groupe de $U(n)$ appelé groupe spécial unitaire d'ordre n.

Propriété 3.27

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
Pour que $u \in \mathscr{L}(E)$ soit autoadjoint, il faut et il suffit que sa matrice par rapport à une base orthonormale soit hermitienne.

Démonstration

Soit (e) une base orthonormale de E.
u autoadjoint $\Leftrightarrow$ $u^* = u \Leftrightarrow \mathscr{M}_e(u^*) = \mathscr{M}_e(u) \Leftrightarrow \mathscr{M}_e(u)^* = \mathscr{M}_e(u) \Leftrightarrow \mathscr{M}_e(u)$ hermitienne.

Propriété 3.28

Soit $(E,<>)$ un espace hermitien.
Les valeurs propres d'un endomorphisme hermitien de E sont toutes réelles.

Démonstration

Soit x ($\neq 0$) un vecteur propre de valeur propre λ de f.
$f(x) = \lambda x$
$<f(x),x> = <x,f^*(x)> = <x,f(x)>$
$\Rightarrow \quad <\lambda x,x> = <x,\lambda x>$
$\Rightarrow \quad \lambda<x,x> = \overline{\lambda}<x,x>$
$\Rightarrow \quad (\lambda-\overline{\lambda})<x,x> = 0 \qquad$ or $x \neq 0 \Rightarrow <x,x> \neq 0$
$\Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}$

Propriété 3.29

Soit A une matrice normale.
Alors il existe une matrice unitaire P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.