Université de Picardie Jules Verne

Mathématiques

UE Libre : Géométrie

Td 7 **2nd semestre** **2011-2012**

Exercice 1

Problème de Napoléon.

Soit Γ un cercle de rayon r (inconnu) dont on veut déterminer le centre uniquement avec un compas.
Soit A un point de Γ.

1. Soit $\mathscr{C}_1$ un cercle de centre A dont le rayon R est supérieur à r mais inférieur à $2r$.
Soient B et B' les points d'intersection de Γ avec $\mathscr{C}_1$.
Soient C l'autre point d'intersection des cercles de centre B et B' et de rayon $AB = R$.
Montrer que (BB') et (AC) sont perpendiculaires et déterminer la longueur de AC diagonale du losange $ABCB'$ (on pourra considérer le point A' symétrique de A par rapport à O même si l'on ne détermine pas sa position et comparer $\cos(A'AB)$ et $\sin(BA'A)$).
2. Soit D et D' les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ avec le cercle de centre C et de rayon AC.
Et soit X le point d'intersection des cercles de centre D et D' et de rayon $AD = R$.
Déterminer AX et en déduire que X est le centre de Γ.

Exercice 2

Soit ABC un triangle (non aplati).
Soit Z un point du cercle circonscrit à ABC tel que B et Z soient dans le même demi-plan défini par (AC).
Soient I, J et K les projections orthogonales de Z respectivement sur les droites (AB) (AC) et (BC).

1. Montrer que A, I, J et Z sont cocycliques et en déduire que $\operatorname{mes}(IJZ) = \operatorname{mes}(IAZ)$.
2. Montrer, de même, que $\operatorname{mes}(KJZ) = \operatorname{mes}(KCZ)$.
3. Montrer que I, J et K sont alignés.

Exercice 3

Constructibilité du pentagone.

1. Construction d'un pentagone inscrit dans un cercle
Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r.
Soit D une droite passant par O et soient I et K les points d'intersection de D avec Γ.
Soit J le point de Γ tel que mes $\widehat{IOJ} = \dfrac{\pi}{2}$
Soit A le milieu de $[OK]$.
Le cercle de centre A et de rayon AJ coupe $[OI]$ en B.
La médiatrice de $[OB]$ coupe Γ en E et F.
Reporter les distances $IE = IF$ pour trouver les points G et H tels que $IEGHF$ soit un pentagone.

Francis Wlazinski

2. Justification.

Soit C le mileu de $[OB]$. On veut montrer que $OC = r\cos\frac{2\pi}{5}$.

Rappelons que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (nous l'avons calculé dans un exercice précédent).

a. Déterminer AJ.

b. Déterminer OB et en en déduire OC.

Exercice 4

1. Déterminer l'apothème d'un pentagone inscrit dans un cercle de rayon r.
2. a. En déduire une valeur exacte de l'aire de ce pentagone.

   b. Donner une valeur approchée de l'aire quand $r = 2$.

On rappelle que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un des côtés d'un cube de centre O et d'arête a.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ (on pourra utiliser la trigonométrie du triangle rectangle).

Exercice 6

Les solides de Platon:

On s'intéresse aux polyèdres réguliers c'est-dire les polyèdres inscriptibles dans une sphère dont les faces sont des polygones réguliers. Platon en a dénombré cinq qui correspondaient selon lui aux cinq éléments essentiels : le feu, l'air, l'eau, la terre et l'univers.

1. Que peut-on dire du nombre de polygones auxquels appartient un sommet?
2. Que peut-on dire de la somme des angles à un sommet d'un polyèdre convexe inscriptible?
3. a. Etudier suivant la valeur de $n \geq 3$, le nombre maximum de polygones à n cotés auxquels un sommet peut appartenir.

   b. Platon avait-il raison?