Méthodes d'intégration

1. Méthodes élémentaires

1.1. Propriétés de base de l'intégrale

- Si F est une primitive sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ d'une fonction numérique f (une telle fonction F existe en particulier si f est continue sur $[a,b]$), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
  L'application définie sur $[a,b]$ par $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.
- La notation $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne une primitive de f.
  Toute primitive de f s'obtient en ajoutant une constante à $\int f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Avec les hypothèses qui s'imposent, nous avons :
  # $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
  # $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$
  # $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall c\in[a,b]$
  # $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ avec f continue et de signe constant implique $f = 0$.

1.2. Combinaison linéaire de primitives connues

Ex : $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/3} -1+1+\tan^2 t\,\mathrm{d}t = [-t+\tan t]_{\pi/6}^{\pi/3} = \left(-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}$.

1.3. Polynômes trigonométriques

Toute puissance des fonctions sinus et cosinus peut être transformée en combinaison linéaire des sinus et cosinus de multiples entiers de la variable.
Cette opération est appelée "linéarisation de polynômes trigonométriques" et s'obtient en utilisant les formules d'Euler : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

Ex : On cherche à calculer $I = \int_{\pi/2}^{\pi} (1+\cos t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Or, pour tout réel x, nous avons $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{4} = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

D'où $1+\cos t+\cos^2 t = \frac{3}{2}+\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t$ pour tout $t \in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et donc

$I = \int_{\pi/2}^{\pi} (\frac{3}{2}+\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3t}{2}+\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/2}^{\pi}$

$I = \left(\frac{3\pi}{2}+\sin\pi+\frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \left(\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}-1 = \frac{3\pi}{4}-1$

1.4. Reconnaissance de formes usuelles

Soit f une fonction dont on connaît une primitive F, soit u une fonction de dérivée u' et soit $k \in \mathbb{R}$.
Une primitive de la fonction $ku' f(u)$ est $kF(u)$.

Ex : Soit $f(x) = \cos x \sqrt{e^{3\sin x}} = \cos x\, e^{\frac{3}{2}\sin x}$.
Si on pose $u(x) = \frac{3}{2}\sin x$, on a $f(x) = \frac{2}{3}u'(x)e^{u(x)}$.
Et donc, $F(x) = \frac{2}{3}e^{u(x)} = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\sin x} = \frac{2}{3}\sqrt{e^{3\sin x}}$ est une primitive de f.

2. Changement de variable

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
Soit φ une bijection de $[a,b]$ dans $\varphi([a,b])$ tel que φ^{-1} soit de classe $\mathscr{C}^1$.

Alors : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi^{-1}(u)) \times (\varphi^{-1})'(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque 1

On trouve parfois cette propriété sous les formes :

\# Soit $\phi \in \mathscr{C}^1([a,b])$ où $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle contenant $\phi([a,b])$.
Alors : $$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (fo\phi)(u) \times \phi'(u)\,\mathrm{d}u$$

\# Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et soit $\varphi \in \mathscr{C}^1([a,b])$ bijective.
Alors : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \times \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque 2

$$\varphi([a,b]) = \begin{cases} [\varphi(a), \varphi(b)] \text{ si } \varphi \text{ est croissante} \\ [\varphi(b), \varphi(a)] \text{ si } \varphi \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Dans la pratique :

On cherche à déterminer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Si on pose $u = \varphi(x)$, on a $x = \varphi^{-1}(u)$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = (\varphi^{-1})'(u)$ c'est-à-dire $\mathrm{d}x = (\varphi^{-1})'(u)\,\mathrm{d}u$.
On remplace x et $\mathrm{d}x$ par leurs nouvelles valeurs et a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Ex : On cherche à calculer $I = \int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.
On pose $u = x^2 = \varphi(x)$, d'où $x = \sqrt{u} = \varphi^{-1}(u)$ et $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.
φ est croissante et φ est une bijection de $\left[1, \sqrt[4]{3}\right]$ sur $\left[1, \sqrt{3}\right]$.
$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \times \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}[\arctan u]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}.$$

Rappel

arcsin est la fonction définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ qui vérifie $\sin(\arcsin(x)) = x$.
arccos est la fonction définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$ qui vérifie $\cos(\arccos(x)) = x$.
arctan est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $\tan(\arctan(x)) = x$.

$\mathrm{ch}\,x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{sh}\,x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{th}\,x = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$

$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$ $\qquad$ $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x} = 1 - \mathrm{th}^2x$

$(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$ $\qquad$ $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$ $\qquad$ $(\mathrm{th}\,x)' = 1 - \mathrm{th}^2\,x$

argch est la bijection de $[1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ qui vérifie $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x)) = x$.
argsh est la bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x)) = x$.
argth est la bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $\mathrm{th}(\mathrm{argth}(x)) = x$.

Règles pratiques

Soit R une fraction rationnelle à une ou deux variables.
On cherche à calculer $\int f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Si $f(x) = R(\tan x)$, on pose $u = \tan x$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{\tan^2x+1}{\tan^2x-1}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = \tan x$, $x = \arctan u$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{u^2+1}{u^2-1}\times\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2-1}du = -\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|.$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right|.$$

b. Si $f(x) = R(e^x)$, on pose $u = e^x$.

Cela comprend entre autre les formes $R(\mathrm{sh}\,x, \mathrm{ch}\,x)$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{1}{e^x+2e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = e^x$, $x = \ln u$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{1}{u+\frac{2}{u}}\times\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2+2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{2}}.$$

c. Si $f(x) = R(\sin x,\cos x)$ et f impaire, on pose $u = \cos x$.

Ex : Soit $I = \int \cos^3x\sin^3x\,\mathrm{d}x$ sur $[0;\pi]$.

On pose $u = \cos x$, $x = \arccos u$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$.

On a $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2x}$ mais, sur $[0;\pi]$, $\sin x \geq 0$.

$$I = \int u^3\left(\sqrt{1-u^2}\right)^3\times\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = -\int u^3-u^5\,\mathrm{d}u = \frac{u^6}{6}-\frac{u^4}{4}.$$

$$I = \frac{\cos^6x}{6}-\frac{\cos^4x}{4}.$$

d. Si $f(x) = R(\sin x,\cos x)$ et $f(\pi-x) = -f(x)$, on pose $u = \sin x$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{\cos^3x}{\sin^2x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = \sin x$, $x = \arcsin u$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{\left(\sqrt{1-u^2}\right)^3}{u^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1-u^2}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u^2}-1\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{u}-u$$

$$I = -\frac{1}{\sin x}-\sin x.$$

e. Si $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ et f π-périodique, on pose $u = \tan x$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{1}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = \tan x$, $x = \arctan u$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

On a $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$.

$$I = \int \frac{1}{2-\dfrac{1}{1+u^2}} \times \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{1+2u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\dfrac{1}{2}+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

$$I = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\ \arctan \sqrt{2}\,u.$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\,\tan x).$$

f. Si $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, on pose $u = \tan \dfrac{x}{2}$ et on utilise les formules :

$\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = \tan \dfrac{x}{2}$, $x = 2\arctan u$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$I = \int \frac{1}{3+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2}{4+2u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}.$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{x}{2}\right).$$

g. Si $f(x) = R(x, \sqrt{1-x^2})$, on pose $x = \sin u$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On pose $u = \arcsin x$, $x = \sin u$ et $\mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{3\sin^3 u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,\mathrm{d}u = \int \frac{3\sin^3 u\cos u}{\cos u}\,\mathrm{d}u = \int 3\sin^3 u\,\mathrm{d}u .$$

$$I = \int 3(1-\cos^2 u)\sin u\,\mathrm{d}u = \int 3\sin u - 3\sin u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \cos^3 u - 3\cos u.$$

$$I = (\cos^2 u - 3)\cos u.$$

$$I = (-2-\sin^2 u)\sqrt{1-\sin^2 u} = (-2-x^2)\sqrt{1-x^2} .$$

h. Si $f(x) = R(x, \sqrt{x^2+1})$, on pose $x = \mathrm{sh}\,u$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{3x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = \mathrm{argsh}\,x$, $x = \mathrm{sh}\,u$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{3\mathrm{sh}^3 u}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 u+1}}\mathrm{ch}u\,\mathrm{d}u = \int 3\mathrm{sh}^3\,u\,\mathrm{d}u = \mathrm{ch}^3 u - 3\mathrm{ch}\,u.$$

$$I = (\mathrm{ch}^2 u - 3)\mathrm{ch}u.$$

$$I = (-2+\mathrm{sh}^2 u)\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u} .$$

$$I = (-2+x^2)\sqrt{1+x^2} .$$

i. Si $f(x) = R(x, \sqrt{x^2-1})$, on pose $x = \mathrm{ch}\,u$.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{3x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = \mathrm{argch}\,x$, $x = \mathrm{ch}\,u$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u$.

$$I = \int \frac{3\mathrm{ch}^3 u}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 u-1}}\mathrm{sh}u\,\mathrm{d}u = \int 3\mathrm{ch}^3\,u\,\mathrm{d}u = \mathrm{sh}^3 u + 3\mathrm{sh}\,u.$$

$$I = (\mathrm{sh}^2 u + 3)\mathrm{sh}u.$$

$$I = (2+\mathrm{ch}^2 u)\sqrt{-1+\mathrm{ch}^2 u} .$$

$$I = (2+x^2)\sqrt{x^2-1} .$$

En particulier, on a :

$$\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \mathrm{argsh}\,t\right)$$

En effet, $\left(\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+t^2}+t\times\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}+\frac{1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{t^2+1}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{t^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+t^2}+\frac{t^2+1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+t^2}\right).$$

De même, on trouve :

$$\int \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t\right).$$

$$\int \sqrt{t^2-1}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1}-\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1}+\ \mathrm{argch}\ t\right).$$

3. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions continûment dérivables. En intégrant la relation $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient $\int u'v = uv - \int uv'$. Ce procédé s'applique pour calculer les primitives des fonctions suivantes :

\# Produit d'une fonction polynomiale par un sinus, un cosinus, une fonction exponentielle ou une fonction logarithme.
\# Produit d'une exponentielle par un sinus ou un cosinus.
\# Fonctions trigonométriques réciproques.
\# Certaines racines carrées.

On aura parfois à réitérer l'opération.

Ex : On cherche à déterminer la primitive de $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\sin x$ qui s'annule en 0.

La primitive recherchée est la fonction définie par $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

$u = t^2 + t + 1 \quad v' = \sin t$
$u' = 2t + 1 \quad v = -\cos t$

$$\int_0^x (t^2+t+1)\sin t\,\mathrm{d}t = [-(t^2+t+1)\cos t]_0^x + \int_0^x (2t+1)\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= -(x^2+x+1)\cos x + 1 + \int_0^x (2t+1)\cos t\,\mathrm{d}t$$

$u = 2t + 1 \quad v' = \cos t$
$u' = 2 \quad v = \sin t$

$$\int_0^x (2t+1)\cos t\,\mathrm{d}t = [(2t+1)\sin t]_0^x - \int_0^x 2\sin t\,\mathrm{d}t = (2x+1)\sin x + [2\cos t\,]_0^x = (2x+1)\sin x + 2\cos x - 2$$

D'où $\Phi(x) = -(x^2+x+1)\cos x + 1 + (2x+1)\sin x + 2\cos x - 2$
$\quad = (-x^2 - x + 1)\cos x + (2x+1)\sin x - 1.$

4. Intégration des fractions rationnelles

Définition

Soit $(a_0,a_1,a_2,....,a_n)$ une famille de $n(\in \mathbb{N})$ réels et soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$.
On dit que P est un polynôme en X à coefficients réels i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.
Si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé degré de P et est noté $\deg(P)$.

Propriété

Soient A un polynôme et B un polynôme non nul.
Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tels que $\deg R < \deg B$ et $A = B\,Q + R$.
On dit qu'on a effectué la division euclidienne de A par B.
Q est appelé le quotient et R est appelé le reste de cette division.

Remarque

On peut comparer cette propriété à la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ qui donne par exemple lorsque l'on divise 17 par 5 le résultat suivant $17 = 3 \times 5 + 2$.

Exemple

Soient $A = 3X^3 - 2X^2 + 4X - 3$ et $B = X^2 + 3X + 3$.
On obtient $3X^3 - 2X^2 + 4X - 3 = (X^2 + 3X + 3)(3X - 11) + 28X + 30$
et, en particulier, $\dfrac{A}{B} = \dfrac{3X^3 - 2X^2 + 4X - 3}{X^2 + 3X + 3} = 3X - 11 + \dfrac{28X + 30}{X^2 + 3X + 3}$.

Méthode de calcul

On regarde les termes de plus haut degré dans $\underline{3X}^3 - 2X^2 + 4X - 3$ et $\underline{X}^2 + 3X + 3$
Le quotient est $3X$.

On pose la division :

$$\begin{array}{ll|l}
 & 3X^3 - 2X^2 + 4X - 3 & X^2 + 3X + 3 \\ \cline{3-3}
- & (\,3X^3 + 9X^2 + 9X\,) & 3X \\
 & \quad -11X^2 - 5X - 3 &
\end{array}$$

On recommence avec $\underline{-\ 11X}^2 - 5X$ et $\underline{X}^2 + 3X + 3$

$$\begin{array}{ll|l}
 & 3X^3 - 2X^2 + 4X - 3 & X^2 + 3X + 3 \\ \cline{3-3}
- & (\,3X^3 + 9X^2 + 9X\,) & 3X - 11 \\
 & \quad -11X^2 - 5X - 3 & \\
- & \quad (\,-11X^2 - 33X - 33\,) & \\
 & \qquad\qquad 28X + 30 &
\end{array}$$

Propriété

Tout polynôme non nul P à coefficients réels se factorise sous la forme d'un produit de facteurs de degré 1 et de facteurs de degré 2 n'ayant pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Exemples

$X^4 - 16 = (X-2)(X+2)(X^2+4)$ et $(X^4-16)^2 = (X-2)^2(X+2)^2(X^2+4)^2$.

Propriété

Soient A un polynôme et B un polynôme dont le terme constant est non nul. Soit n un entier naturel.
Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tels que $\deg Q \leq n$ et $A = BQ + X^{n+1}R$.
On dit qu'on a effectué la division de A par B suivant les puissances croissantes à l'ordre n.
Q est appelé le quotient et R est appelé le reste à l'ordre n de cette division.

Exemple

Soient $A = 1+X$, $B = 1+X+X^2$ et $n = 4$.
On obtient $1+X = (1+X+X^2)(1-X^2+X^3) - X^5$
et, en particulier, $\dfrac{1+X}{1+X+X^2} = 1 - X^2 + X^3 - \dfrac{X^5}{1+X+X^2}$
ou encore $\dfrac{1+X}{(1+X+X^2)X^5} = \dfrac{1}{X^5} - \dfrac{1}{X^3} + \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{1}{1+X+X^2}$.

Méthode de calcul

Il faut d'abord ordonner le polynôme suivant les puissances croissantes.
On regarde les termes de constants dans $1+X$ et $1+X+X^2$. Le quotient est 1.

On pose la division :

$$\begin{array}{l|l}
\quad 1+X & 1+X+X^2 \\ \cline{2-2}
-\ (1+X+X^2) & 1 \\
\qquad -X^2 &
\end{array}$$

On recommence jusqu'à l'obtention du degré voulu :

$$\begin{array}{l|l}
\quad 1+X & 1+X+X^2 \\ \cline{2-2}
-\ (1+X+X^2) & 1 - X^2 + X^3 \\
\qquad -X^2 & \\
\quad -\ (-X^2 - X^3 - X^4) & \\
\qquad\qquad X^3 + X^4 & \\
\qquad -\ (X^3 + X^4 + X^5) & \\
\qquad\qquad\qquad -X^5 &
\end{array}$$

Propriété

Soient A et B deux polynômes non nuls. Soit F la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$.
D'après le résultat sur la division euclidienne, il existe un unique couple (Q,R) de polynômes avec $\deg R < \deg B$ tels que $F = Q + \frac{R}{B}$.
D'après le résultat sur la factorisation des polynômes, B peut s'écrire sous la forme :

$B = c\, U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha 2} \ldots . U_p^{\alpha_p} D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} \ldots . D_m^{\beta_m}$ où :

- # c est un réel.
- # Les U_i sont des polynômes de degré 1 sous la forme $X - a_i$.
- # Les D_j sont des polynômes de degré 2 sans racine réelle sous la forme $X^2 + c_jX + d_j$.
- # Les α_i et β_j sont des entiers représentant l'ordre de multiplicité des U_i et D_j.

On admet que l'on peut mettre la fraction $\frac{R}{B}$ sous la forme d'une somme de fractions des formes suivantes

$$\frac{R}{B} = \frac{\gamma_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{\gamma_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \ldots . + \frac{\gamma_{1,a_1}}{(x-a_1)^{a_1}} + \frac{\gamma_{2,1}}{(x-a_2)} + \ldots + \frac{\gamma_{2,a_2}}{(x-a_2)^{a_2}} + .. + \frac{\gamma_{p,1}}{(x-a_p)} + \ldots + \frac{\gamma_{p,a_p}}{(x-a_p)^{a_p}}$$
$$\frac{\delta_{1,1}x + \zeta_{1,1}}{(X^2 + c_1X + d_1)} + \ldots + \frac{\delta_{1,\beta_1}x + \zeta_{1,\beta_1}}{(X^2 + c_1X + d_1)^{\beta_1}} + \ldots \ldots . + \frac{\delta_{m,1}x + \zeta_{m,1}}{(X^2 + c_mX + d_m)} + \ldots + \frac{\delta_{m,\beta_m}x + \zeta_{m,\beta_m}}{(X^2 + c_mX + d_m)^{\beta_m}}$$

où les γ_i, δ_i et ζ_i sont des réels (ou des complexes).

Cette transformation s'appelle la décomposition en éléments simples de $\frac{R}{B}$(et de F).

Exemple

$$\frac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2} = 1 - \frac{X + \frac{1}{4}}{X^2+1} + \frac{\frac{1}{2}X}{(X^2+1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2}.$$

Méthode d'intégration

Après avoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, il nous reste à intégrer deux types de fractions :

Type 1 : $\frac{k}{(ax+b)^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $a,b,k \in \mathbb{R}$ où $a \neq 0$. On a :

Si $p = 1$, $\int \frac{k}{ax+b} \mathrm{d}x = \frac{k}{a} \ln|ax+b|$ sur $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ ou $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$.
Si $p > 1$, $\int \frac{k}{(ax+b)^p} \mathrm{d}x = \frac{k}{a} \times \frac{1}{1-p} \times \frac{1}{(ax+b)^{p-1}}$ sur $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ ou $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$.

Type 2 : $\frac{kx+l}{(ax^2+bx+c)^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $a,b,c,k,l \in \mathbb{R}$ où $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

1ère étape : $kx + l = \frac{k}{2a}(2ax+b) - \frac{kb}{2a} + l$

2ème étape : En décomposant la fraction, on obtient une somme de la forme :
$\mu \times \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^p} + \lambda \times \frac{1}{(ax^2+bx+c)^p}$ où μ et λ sont des constantes.

Nous nous intéressons aux deux fractions de cette expression.

a. Première fraction : $\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^p}$.

Cette fraction est sous la forme $\frac{u'}{u^p}$. On a donc :

Si $p=1$ et $a>0$, $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} = \ln(ax^2+bx+c)$ sur $\mathbb{R}$.

Si $p=1$ et $a<0$, $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} = \ln(-(ax^2+bx+c))$ sur $\mathbb{R}$.

Si $p>1$, $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^p} = \frac{1}{1-p} \times \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{p-1}}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Deuxième fraction : $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^p}$.

On a $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

On pose $t=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$ (on a $\Delta = b^2-4ac<0$).

D'où $x=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t-\frac{b}{2a}$ et $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^p}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\right)^p}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\left(a\left[\frac{-\Delta}{4a^2}t^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\right)^p}\times\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\times\left(\frac{4a}{-\Delta}\right)^p\int\frac{1}{(1+t^2)^p}\mathrm{d}t.$$

Il nous reste donc à déterminer une primitive des fonctions du type : $I_p=\int\frac{1}{(1+t^2)^p}\mathrm{d}t$.

Si $p=1$, $I_1=\arctan t$

Si $p>1$, on intègre par partie et on obtient :

$u=\frac{1}{(1+t^2)^p}$ $\quad v'=1$

$u'=-p\times 2t\times\frac{1}{(1+t^2)^{p+1}}$ $\quad v=t$

$$I_p=\int\frac{1}{(1+t^2)^p}\mathrm{d}t$$

$$I_p=\frac{t}{(1+t^2)^p}+2p\int\frac{t^2}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t$$

$$I_p=\frac{t}{(1+t^2)^p}+2p\left(\int\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t\right)$$

$$I_p=\frac{t}{(1+t^2)^p}+2p\left(\int\frac{1}{(1+t^2)^{p}}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t\right)$$

$$I_p=\frac{t}{(1+t^2)^p}+2p(I_p-I_{p+1})$$

$$I_{p+1}=\frac{1}{2p}\left[(2p-1)I_p+\frac{t}{(1+t^2)^p}\right].$$

Cette relation de récurrence permet de déterminer de proche en proche les I_p pour $p\geq 2$.

On obtient pour $p=2$ et $p=3$:

$$I_2=\frac{1}{2}\left(I_1+\frac{t}{1+t^2}\right)=\frac{1}{2}\arctan t+\frac{t}{2(1+t^2)}.$$

$$I_3=\frac{1}{4}\left(3I_2+\frac{t}{(1+t^2)^2}\right).$$

$$I_3=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\arctan t+\frac{3t}{2(1+t^2)}+\frac{t}{(1+t^2)^2}\right).$$

$$I_3=\frac{3}{8}\arctan t+\frac{3t}{8(1+t^2)}+\frac{t}{4(1+t^2)^2}.$$

Ex : Soit $I=\int \dfrac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x$.

$I=\dfrac{3}{2}\int \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x+\int \dfrac{1}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x$

On a : $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$

$I=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{-1}{x^2+2x+5}+\int \dfrac{1}{((x+1)^2+4)^2}\mathrm{d}x$

On pose $2u=x+1$ c'est-à-dire $u=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$

D'où $x=2u-1$ et $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}u$.

$I=\dfrac{-3}{2(x^2+2x+5)}+\dfrac{1}{16}\times 2\int \dfrac{1}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u$

$I=\dfrac{-3}{2(x^2+2x+5)}+\dfrac{1}{8}\times\left[\dfrac{1}{2}\arctan u+\dfrac{u}{2(1+u^2)}\right]$

$I=\dfrac{-3}{2(x^2+2x+5)}+\dfrac{1}{8}\times\left[\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+\dfrac{\frac{x+1}{2}}{2\left(1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)}\right]$

$I=\dfrac{-3}{2(x^2+2x+5)}+\dfrac{1}{16}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+\dfrac{x+1}{8(x^2+2x+5)}$

$I=\dfrac{1}{16}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+\dfrac{x-11}{8(x^2+2x+5)}$.

5. Intégrales abéliennes

1°) *Intégrales de la forme* : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

\# Si $a=0$ et $b=0$, trivial

\# Si $a=0$ et $b\neq 0$, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{bx+c}}\mathrm{d}x=\frac{2}{b}\int\frac{b}{2\sqrt{bx+c}}\mathrm{d}x=\frac{2}{b}\sqrt{bx+c}$ sur $\left]-\dfrac{c}{b},+\infty\right[$

\# Si $a\neq 0$, $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

\# Si $\Delta=0$, alors on doit avoir $a>0$.

$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{a}\int\frac{1}{\left|ax+\frac{b}{2}\right|}\mathrm{d}x$ sur l'intervalle $\left]-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right[$ ou sur l'intervalle $\left]-\dfrac{b}{2a},+\infty\right[$.

\# Si $\Delta<0$, alors on doit avoir $a>0$.

On pose $t=\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$.

D'où $x=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t-\dfrac{b}{2a}$ et $\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{a\left[\frac{-\Delta}{4a^2}t^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}}\times\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\times\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-\Delta}}\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{a}}{a}\operatorname{argsh}t=\frac{\sqrt{a}}{a}\operatorname{argsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}.$$

\# Si $\Delta > 0$, on pose $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$.

D'où $x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t - \frac{b}{2a}$ et $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\ \mathrm{d}t$.

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a\left[\frac{\Delta}{4a^2}t^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\mathrm{d}t.$$

\# Si $a > 0$, on intègre à l'extérieur des racines et

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}\ \operatorname{argch} t$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}\ \operatorname{argch} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}.$$

\# Si $a < 0$, on intègre à l'intérieur des racines et

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{-a}}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{-a}}{a}\ \arcsin t$$

$$= \frac{\sqrt{-a}}{a}\ \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}.$$

Ex : Soit $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}\mathrm{d}x$.

$\Delta = 9$ et $x^2+x-2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

D'où $I = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}}\mathrm{d}x$.

On pose $t = \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

D'où $x = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\mathrm{d}t$.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}t^2 - \frac{9}{4}}} \times \frac{3}{2}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t = \operatorname{argch} t = \operatorname{argch} \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$I = \ln\left(\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\left(\frac{2x+1}{3}\right) + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}\right)$$

2°) *Intégrales de la forme* : $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

\# Si $a = 0$ et $b = 0$, trivial.

\# Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\int \sqrt{bx+c}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3b}\int \frac{3}{2}b\sqrt{bx+c}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3b}\sqrt{(bx+c)^3}$ sur $\left[-\frac{c}{b}, +\infty\right[$.

\# Si $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

\# Si $\Delta = 0$, alors on doit avoir $a > 0$.

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{a}\ \int\left|x+\frac{b}{2a}\right|\mathrm{d}x.$$

\# Si $\Delta < 0$, alors on doit avoir $a > 0$.

On pose $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$.

D'où $x = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} t - \dfrac{b}{2a}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,\mathrm{d}t$.

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \sqrt{a\left[\frac{-\Delta}{4a^2}t^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]} \times \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{d}t.$$

$$= \frac{-\Delta}{4a\sqrt{a}} \int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)$

\# Si $\Delta > 0$

On pose $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$.

D'où $x = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} t - \dfrac{b}{2a}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,\mathrm{d}t$.

$$J = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \sqrt{a\left[\frac{\Delta}{4a^2}t^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\mathrm{d}t$$

$$= \int \sqrt{\frac{\Delta}{4a}t^2 - \frac{\Delta}{4a}} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\mathrm{d}t.$$

\# Si $a > 0$, on intègre à l'extérieur des racines et

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}} \int \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\Delta}{4a\sqrt{a}} \int \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\int \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1} - \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right)$.

\# Si $a < 0$, on intègre à l'intérieur des racines et

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{-a}} \int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\Delta}{4a\sqrt{-a}} \int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right)$.

Ex : Soit $I = \int \sqrt{x^2+16x+100}\,\mathrm{d}x$.

On a $\Delta = 256 - 400 = -144$ et $x^2+16x+100 = (x+8)^2 + 36$.

D'où $I = \int \sqrt{(x+8)^2 + 6^2}\,\mathrm{d}x$.

On pose $6t = x+8$.

D'où $x = 6t - 8$ et $\mathrm{d}x = 6\,\mathrm{d}t$.

$I = \int 36\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 36\int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

$I = 18\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)$.

3°) *Intégrales de la forme* : $\int R\left(x, \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ avec a,b,c et d des réels et R une fraction rationnelle.

On pose $t = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

On obtient :

$$t^2(cx+d) = ax+b$$

$$(ct^2-a)x = b-dt^2$$

$$x = \frac{b-dt^2}{ct^2-a}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2dt(ct^2-a)-2ct(b-dt^2)}{(ct^2-a)^2}\mathrm{d}t = \frac{-2cdt^3+2adt-2bct+2dct^3}{(ct^2-a)^2}\mathrm{d}t = 2\frac{ad-bc}{(ct^2-a)^2}t\mathrm{d}t.$$

On obtient alors une fraction rationnelle en t.

Ex : Soit $I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$ sur $]1;+\infty[$.

On pose $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

D'où $x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} = -1 + \dfrac{2}{1-t^2}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{4t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$.

Et $I = \int \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\times t \times \dfrac{4t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t = \int \dfrac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}\mathrm{d}t$.

Or $\dfrac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} = -\dfrac{2}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1-t}$.

Donc $I = -2\arctan t + \ln|1+t| - \ln|1-t|$.

C'est-à-dire $I = -2\arctan\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \ln\left|1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right| - \ln\left|1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right|$.

4°) *Intégrales de la forme* : $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $a > 0$ et R une fraction rationnelle.

On pose $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}$

On se ramène alors aux cas précédents.

Ex : Soit $I = \int \dfrac{1}{x-2+\sqrt{x^2-2x+2}}\mathrm{d}x$.

On pose $t = \sqrt{x^2-2x+2} - x$.

D'où $(t+x)^2 = x^2-2tx+2$

$$t^2 = (-2-2t)x+2$$

$$x = \frac{2-t^2}{2+2t}$$

On a alors $\mathrm{d}x = -\dfrac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

D'où $I = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{t^2+2t+2}{t(1+t)}\mathrm{d}t$ or $\dfrac{t^2+2t+2}{t(1+t)} = 1 + \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

C'est-à-dire $I = \dfrac{1}{2}(t + 2\ln|t| - \ln|t+1|)$

et $I = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-2x+2} - x + 2\ln\left|\sqrt{x^2-2x+2} - x\right| - \ln\left|\sqrt{x^2-2x+2} - x + 1\right|\right)$.