

Introduction à l'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, K est un corps commutatif (en pratique et généralement $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

1. Espaces vectoriels

1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1

On dit qu'un ensemble $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K , ou un K -espace vectoriel, si et seulement si :

- ◇ $(E, +)$ est un groupe commutatif c'est-à-dire :
 - La loi $+$ est une loi de composition interne sur E :
 $\forall x, y \in E, x + y \in E$.
(On peut dire aussi que la loi $+$ est une application de $E \times E$ vers E)
 - La loi $+$ est associative :
 $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$.
 - La loi $+$ admet un (unique) élément neutre :
 $\exists e \in E / \forall x \in E, x + e = e + x = x$.
 - Tout élément admet un (unique) symétrique pour la loi $+$:
 $\forall x \in E, \exists \tilde{x} \in E / x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$.
 - La loi $+$ est commutative :
 $\forall x, y \in E, x + y = y + x$.
- ◇ La loi \cdot est une loi de composition externe sur E à domaine d'opérateurs K c'est-à-dire :
 $\forall x \in E, \forall k \in K, k \cdot x \in E$.
(On peut dire aussi que la loi \cdot est une application de $K \times E$ vers E)
- ◇ La loi \cdot vérifie : $\forall \alpha, \beta \in K$ et $\forall u, v \in E$,
 - $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
 - $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
 - $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \times \beta) \cdot u$
 - $1 \cdot u = u$

Exemples 1.2

- L'ensemble des vecteurs du plan ou l'ensemble des vecteurs de l'espace.
- $\mathbb{R}[X]$ est un \mathbb{R} -e.v. mais n'est pas un \mathbb{C} -e.v.
 $\mathbb{C}[X]$ est un \mathbb{C} -e.v. mais aussi un \mathbb{R} -e.v.
- Tout corps commutatif est un espace vectoriel sur lui-même. En particulier \mathbb{Q} est un \mathbb{Q} -e.v.
 \mathbb{R} est un \mathbb{R} -e.v. mais aussi un \mathbb{Q} -e.v. et de la même façon, \mathbb{C} est un \mathbb{C} -e.v., un \mathbb{R} -e.v. et un \mathbb{Q} -e.v.
- $\{0\}$ est un \mathbb{R} -e.v.

Remarques 1.3

- Par abus, on ne note pas la loi ".". On dit aussi que E est un K -e.v. sans préciser les lois.
- On parlera d'espace vectoriel réel pour les \mathbb{R} -e.v. et d'espace vectoriel complexe pour les \mathbb{C} -e.v.
- Si E est un K -e.v., les éléments de E sont appelés des vecteurs et ceux de K sont appelés des scalaires.
- L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$ ou 0_E ou plus simplement 0 .
- Faire attention aux lois.
- Un espace vectoriel n'est jamais vide puisque $0 \in E$.
- Le vecteur \tilde{x} tel que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$ est appelé opposé de x et est noté $-x$.
- Soient u et v deux vecteurs d'un K -e.v. E .
On définit $u - v$ par $u + (-v)$ où $-v$ désigne le symétrique de v pour la loi interne de E .

Définition 1.4

Soient f et g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} (ou autre) et soit λ un élément de \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).
On définit la fonction appelée somme de f et g notée $f+g$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).
On définit la fonction $\lambda.f$ par $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$.

Remarque 1.5

On définit les mêmes opérations sur les suites (qui sont des fonctions) : pour tout entier n ,

$$(u+v)_n = u_n + v_n$$
$$(\lambda.u)_n = \lambda u_n$$

Exemples 1.6

- $E = \{ \text{fonctions définies sur } \mathbb{R} \}$ muni des lois usuelles est un \mathbb{R} -e.v.
- $F = \{ \text{suites à valeurs dans } \mathbb{R} \}$ muni des lois usuelles est un \mathbb{R} -e.v.

Propriété 1.7

Soit E un espace vectoriel sur K . Pour tout scalaire α et pour tout vecteur u , on a :

- $0_K u = 0_E$.
- $\alpha 0_E = 0_E$.
- $\alpha u = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0_K$ ou $u = 0_E$.

Démonstration

- $0_K u = (0_K + 0_K) u = 0_K u + 0_K u$.
Puisque $(E, +)$ est un groupe $-0_K u$ existe.
On a donc $0_K u - 0_K u = 0_K u + 0_K u - 0_K u$ c'est-à-dire $0_E = 0_K u$.
- $\alpha 0_E = \alpha(0_E + 0_E) = \alpha 0_E + \alpha 0_E$.
Puisque $(E, +)$ est un groupe $-\alpha 0_E$ existe.
On a donc $\alpha 0_E - \alpha 0_E = \alpha 0_E + \alpha 0_E - \alpha 0_E$ c'est-à-dire $0_E = \alpha 0_E$.
- (\Leftarrow) Voir deux premiers points.
 (\Rightarrow) Si $\alpha = 0_K$ l'implication est juste.
Si $\alpha \neq 0_K$, puisque K est un corps α^{-1} existe.
On a donc :
$$\alpha u = 0_E \Rightarrow \alpha^{-1} . (\alpha u) = \alpha^{-1} . (0_E) \Rightarrow (\alpha^{-1} \alpha) u = 0_E \Rightarrow 1 . u = 0_E \Rightarrow u = 0_E$$

Propriété 1.8

Soit E un espace vectoriel sur K . Pour tout scalaire α et pour tous vecteurs u et v , on a :

- $\alpha(-u) = (-\alpha)u = -(\alpha u)$.
- $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Démonstration

- Il faut montrer que $\alpha(-u) + \alpha u (= \alpha u + \alpha(-u)) = 0_E$ (E est abélien) et $(-\alpha)u + \alpha u = 0_E$.
 $\alpha(-u) + \alpha u = \alpha(-u + u) = \alpha 0_E = 0_E$.
 $(-\alpha)u + \alpha u = (-\alpha + \alpha)u = 0_K u = 0_E$.
- $\alpha(u - v) = \alpha(u + (-v)) = \alpha u + \alpha(-v) = \alpha u + (-\alpha v) = \alpha u - \alpha v$.

Remarques 1.9

- On a donc $(-1).u = -(1.u) = -u$.
- Si E est un espace vectoriel sur K , E est également un espace vectoriel sur tout sous-corps K' de K . Par exemple, un \mathbb{C} -espace vectoriel est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel. Si $K' \neq K$, ces deux espaces vectoriels doivent être considérés comme différents.

Propriété 1.10

Soient E_1, E_2, \dots, E_n une famille de n espaces vectoriels sur un même corps K .

Soit E l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

E est un espace vectoriel sur K lorsqu'on le munit des lois suivantes :

$$\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in E, \forall \lambda \in K$$

$$i) \quad u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

$$ii) \quad \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n).$$

Remarque 1.11

Ces lois sont appelées lois produit usuelles.

Démonstration

Pas de difficulté particulière, il suffit de vérifier les 10 points de la définition : c'est donc un peu long à rédiger.

Exemple 1.12

\mathbb{R}^2 muni des lois précédentes c'est-à-dire :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

est donc un \mathbb{R} -e.v.

Remarques 1.13

- Attentions aux lois.
- Si E est un K -espace vectoriel, E^n ($n \geq 2$) est donc muni d'une structure de K -espace vectoriel.
- On en déduit la structure d'espace vectoriel de $K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ où } x_i \in K\}$.

1.2 Combinaison linéaire

Définition 1.14

Soient $(A, +)$ un monoïde additif et $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A . On dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est à support fini si l'ensemble des indices i de I tels que $a_i \neq 0$ est fini.

Pour une telle famille, on peut considérer $\sum_{i \in I} a_i$, qui est appelée somme à support fini.

On note parfois $A^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini d'éléments de A .

Définition 1.15

Soient E un espace vectoriel sur K , I un ensemble non vide, $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E , et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille à support fini d'éléments de K .

La somme $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ est appelée combinaison linéaire (C.L.) des vecteurs u_i avec les coefficients λ_i .

Exemple 1.16

Soit $\mathcal{F} = (1, X, X^2, \dots, X^p, \dots) = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$.

La famille \mathcal{F} est infinie mais tout polynôme est une C.L. de cette famille.

Remarques 1.17

- Si $u = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ est une C.L. des u_i alors il existe $J \subset I$ tel que J fini et $u = \sum_{i \in J} \lambda_i u_i$.
On peut généralement considérer un réindicateur de façon à obtenir une relation du type :
$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$
- 0_E appartient à l'ensemble des C.L. de toute famille non vide d'éléments de E .

Exemples 1.18

- Soit \vec{u} un vecteur non nul du plan.
Une C.L. de \vec{u} est un vecteur colinéaire à \vec{u} .
{C.L. de \vec{u} } = $\{k\vec{u} / k \in \mathbb{R}\} = \{\text{tous les vecteurs colinéaires à } \vec{u}\}$.
- Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Une C.L. de \vec{u} et \vec{v} est un vecteur coplanaire à \vec{u} et \vec{v} .
{C.L. de \vec{u} et \vec{v} } = $\{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\text{tous les vecteurs coplanaires à } \vec{u} \text{ et } \vec{v}\}$.
- On considère l'ensemble $\{1, X, X^2\}$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Une C.L. de $\{1, X, X^2\}$ est un polynôme de la forme $a + bX + cX^2$.
{C.L. de $\{1, X, X^2\}$ } = $\{a + bX + cX^2 / a, b, c \in \mathbb{R}\}$
= $\{\text{tous les polynômes à coefficients dans } \mathbb{R} \text{ de degré } \leq 2\}$
= $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarques 1.19

- x_1 est une C.L. des $(x_i)_{i=1, n}$.
- Si $i_0 \in I$, x_{i_0} est une C.L. des $(x_i)_{i \in I}$.
- $x \in E$ appartient à l'ensemble des C.L. de toute famille d'éléments de E dont il fait partie.

Remarques 2.5

- Dans les caractérisations précédentes, on n'oubliera pas la condition $F \neq \emptyset$.
En général, il suffit de vérifier que le vecteur nul 0 de E appartient à F .
En effet, tout s.e.v. de E contient au moins 0 .
- Voyons pourquoi une C.L. doit être finie pour qu'un s.e.v. soit stable par C.L.
Soit, par exemple, $E = \{\text{suites numériques}\}$ et $F = \{\text{suites numériques qui convergent vers } 0\}$.
 F est un s.e.v. de E .

Considérons les suites $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_{p,n} = \left(\frac{1}{n}\right)^p$ pour $n > 1$.

Toutes ses suites appartiennent à F . Soit v la suite définie par $v = \sum_{p \geq 0} u_p$.

$$\text{Son terme général est } v_n = \sum_{p \geq 0} u_{n,p} = \sum_{p \geq 0} \left(\frac{1}{n}\right)^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{p+1}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Donc $v \notin F$.

- Si F est un s.e.v. de E et si G est un s.e.v. de F , alors G est un s.e.v. de E (avec les mêmes lois).

Exemples 2.6

- Pour tout entier naturel n , $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq n\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.
- Plus généralement, pour tout entier naturel n , l'ensemble $K_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v. de $K[X]$.
- Soit I un intervalle de \mathbb{R} , non réduit à un point.
Soit $\mathcal{F}(I, K)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions de I dans K .

Les sous-ensembles suivants sont des s.e.v. de $\mathcal{F}(I, K)$:

L'ensemble $\mathcal{C}(I, K) = \mathcal{C}^0(I, K)$ des fonctions continues de I dans K .

L'ensemble $\mathcal{D}(I, K)$ des fonctions dérivables de I dans K .

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, K)$ des fonctions de classe \mathcal{C}^k de I dans K .

L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I, K)$ des fonctions infiniment dérivables de I dans K .

2.2 Opérations entre s.e.v.

Propriété 2.7

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de s.e.v. d'un K -e.v. E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v. de E .

Démonstration

- $\forall i \in I, 0 \in F_i$. Donc $0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.
- Soient $u, v \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in K$. Puisque $u \in \bigcap_{i \in I} F_i$, on a : $u \in F_i, \forall i \in I$.
De même, $v \in F_i, \forall i \in I$. Donc $\forall i \in I, \lambda u + \mu v \in F_i$ c'est-à-dire $\lambda u + \mu v \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

Exemple 2.8

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Muni des lois usuelles c'est un \mathbb{R} -e.v.

Pour tout entier n supérieur ou égale à 1, soit $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ le s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continûment dérivable n fois.

On a alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Définition et propriété 2.9

Soit X une partie (quelconque) d'un K -espace vectoriel E .

On appelle sous-espace engendré par X et on note $\text{Vect}(X)$ ou $\langle X \rangle$ le plus petit (au sens de l'inclusion) des s.e.v. de E qui contient X .

Remarques 2.10

- $\text{Vect}(X)$ est l'intersection de tous les s.e.v. de E qui contiennent X .
En effet, soit G l'intersection de tous les s.e.v. de E qui contiennent X .
Donc G est inclus dans tout s.e.v. de E qui contient X .
On sait que G est aussi lui-même un s.e.v. et c'est nécessairement le plus petit.
- Dans le cas d'une famille finie $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, on note parfois $\text{Vect}(A) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.
- Si X est vide, $\text{Vect}(X) = \{0\}$.

Définition 2.11

Soit A une famille finie de vecteurs d'un K -e.v. E .

Si $\text{Vect}(A) = E$, on dit que A est un système générateur de E .

Propriété 2.12

Soit X une partie non vide d'un K -espace vectoriel E .

$\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

Démonstration

Uniquement dans le cas où $X = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$.

(Idem si X famille infinie alors simplement somme à support fini).

Soit $F = \{\text{C.L. des éléments de } X\}$. Nous allons montrer que $F = \text{Vect}(X)$.

1ère étape : $\text{Vect}(X) \subset F$ c'est-à-dire F est un s.e.v. qui contient X .

On a $F = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \in K \right\} = \{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_i \in K \}$. En premier lieu, on montre que $X \subset F$.

On a $x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n$
 $x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n$ etc....

- Puisque X est non vide et puisque $X \subset F$, on a donc $F \neq \emptyset$.
- Soient $\lambda, \mu \in K$ et soient $u, v \in F$.
 $u \in F \Leftrightarrow u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, avec $\lambda_i \in K \ \forall i = 1, n$.
 $v \in F \Leftrightarrow v = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \dots + \lambda'_n x_n$, avec $\lambda'_i \in K \ \forall i = 1, n$.
 $\lambda u + \mu v = \lambda(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) + \mu(\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \dots + \lambda'_n x_n)$.
 $= \lambda \lambda_1 x_1 + \lambda \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda \lambda_n x_n + \mu \lambda'_1 x_1 + \mu \lambda'_2 x_2 + \dots + \mu \lambda'_n x_n$.
 $= (\lambda \lambda_1 + \mu \lambda'_1) x_1 + (\lambda \lambda_2 + \mu \lambda'_2) x_2 + \dots + (\lambda \lambda_n + \mu \lambda'_n) x_n$. On a donc bien $\lambda u + \mu v \in F$.

2ème étape : $F \subset \text{Vect}(X)$.

$\text{Vect}(X)$ est le plus petit s.e.v. de E qui contient X .

Puisque $\text{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire, $\text{Vect}(X)$ doit contenir toutes les C.L. d'éléments de X c'est-à-dire $F \subset \text{Vect}(X)$. Or F est un s.e.v., donc, de par la définition de $\text{Vect}(X)$, on a $\text{Vect}(X) = F$.

Conséquences 2.13

- L'espace engendré par un vecteur non nul du plan est la droite vectorielle des vecteurs qui lui sont colinéaires.
- L'espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires de l'espace est le plan vectoriel des vecteurs qui leur sont coplanaires.
- L'espace engendré par une famille de vecteurs coplanaires de l'espace dont deux sont non colinéaires est le plan vectoriel engendré par de ces deux vecteurs.

Remarques 2.14

- La plupart des s.e.v. que nous allons étudier sont engendrés par des éléments de l'espace lui-même. Ce qui explique l'erreur que l'on peut faire en faisant l'amalgame entre les s.e.v., les s.e.v. engendrés par une famille et les combinaisons linéaires.
Contre exemple : $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ comme s.e.v. de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
- Soient $u = (1, 0, 1)$ et $v = (2, 3, -1)$ dans \mathbb{R}^3 et $F = \langle u, v \rangle$.
Soient $x = (1, 3, -2)$, $y = (3, 3, 0)$ et $z = (0, -3, 3)$ dans \mathbb{R}^3 et $G = \langle x, y, z \rangle$.
On a $F = G$ car $x = v - u$, $y = u + v$ et $z = 2u - v$
donc toute C.L. de (x, y, z) est une C.L. de (u, v)
et $v = 2x + z$ et $u = (y - x) / 2$
donc toute C.L. de (u, v) est une C.L. de (x, y, z) .

Remarque 2.15

En général, la réunion de deux sous espaces vectoriels n'est pas un sous espace vectoriel.

Définition 2.16

Soit E un K -e.v. Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. de E . La somme de E_1 et E_2 qui est notée $E_1 + E_2$ est l'ensemble des éléments de E de la forme $x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

Remarques 2.17

Avec les notations de la définition précédente,

- $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\} = \{x \in E / \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2 \text{ et } x = x_1 + x_2\}$.
- $x \in E_1 + E_2 \Leftrightarrow \exists x_1 \in E_1 \text{ et } \exists x_2 \in E_2 / x = x_1 + x_2$.
- $E_1 + E_2 = E_2 + E_1$.
- $E_1 + \{0\} = \{0\} + E_1 = E_1$.
- Pour tout s.e.v. E_3 de E , $(E_1 + E_2) + E_3 = E_1 + (E_2 + E_3)$.
- $E_1 + E_1 = E_1$.

Exemple 2.18

Dans \mathbb{R}^3 , si $F = \{\lambda u_1; \text{ où } u_1 = (1, 1, 0) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle u_1 \rangle$ et $G = \{\mu u_2; \text{ où } u_2 = (-1, 1, 0) \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\} = \langle u_2 \rangle$, alors $F + G = \langle u_1, u_2 \rangle$.

Propriété 2.19

Soit E un K -e.v. Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. de E .

La somme de E_1 et E_2 est le s.e.v. engendré par la réunion de E_1 et E_2 .

C'est-à-dire $E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$.

Démonstration

Soit $S = \{x_1 + x_2 / x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$. $\text{Vect}(E_1 \cup E_2)$ est le plus petit s.e.v. de E qui contient $E_1 \cup E_2$. Il nous faut donc montrer que $E_1 \cup E_2 \subset S \subset \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$ et que S est un s.e.v.

$0 \in E_2$ car E_2 est un s.e.v de E . Donc $\forall x_1 \in E_1, x_1 = x_1 + 0$ donc $x_1 \in S$ c'est-à-dire $E_1 \subset S$
 $0 \in E_1$ car E_1 est un s.e.v de E . Donc $\forall x_2 \in E_2, x_2 = 0 + x_2$ donc $x_2 \in S$ c'est-à-dire $E_2 \subset S$.
D'où $E_1 \cup E_2 \subset S$.

$\text{Vect}(E_1 \cup E_2)$ est l'ensemble des CL des éléments de $E_1 \cup E_2$.

Soit $x \in S, \exists x_1 \in E_1$ et $\exists x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.

$E_1 \subset E_1 \cup E_2$ donc $x_1 \in E_1 \cup E_2$ et $E_2 \subset E_1 \cup E_2$ donc $x_2 \in E_1 \cup E_2$.

$x_1 + x_2$ est donc une CL de $E_1 \cup E_2$ d'où $x_1 + x_2 \in \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$.

$0 \in E_1$ et $0 \in E_2, 0 + 0 = 0 \in S$ donc S est non vide.

Soient $\lambda, \mu \in K$ et soient $x = x_1 + x_2 / x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ et $x' = x'_1 + x'_2 / x'_1 \in E_1$ et $x'_2 \in E_2$.

$\lambda x + \mu x' = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(x'_1 + x'_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \mu x'_1 + \mu x'_2 = \lambda x_1 + \mu x'_1 + \lambda x_2 + \mu x'_2$

Or $\lambda x_1 + \mu x'_1 \in E_1$ car E_1 est un s.e.v de E et $\lambda x_2 + \mu x'_2 \in E_2$ car E_2 est un s.e.v de E donc $\lambda x + \mu x' \in S$.

Propriété 2.20

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ une famille finie de n ($\in \mathbb{N}^*$) s.e.v. d'un K -e.v. E .

Soit $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ l'ensemble des vecteurs de la forme $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ où $u_i \in F_i$ pour tout $i = 1, n$.
 F est un s.e.v. de E , appelé somme des F_i .

Démonstration

$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \{u \in E / u = u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ où } u_i \in F_i, \forall i = 1, n\}$.

- On a $\forall i = 1, n, 0 \in F_i$ car F_i s.e.v. On a $0 = 0 + 0 + \dots + 0$ donc $0 \in F$. C'est-à-dire $F \neq \emptyset$.
- Soient $\lambda, \mu \in K$ et $u, v \in F$.

$u \in F \Leftrightarrow u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ où $u_i \in F_i$ pour tout $i = 1, n$.

$v \in F \Leftrightarrow v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ où $v_i \in F_i$ pour tout $i = 1, n$.

$\lambda u + \mu v = \lambda(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + \mu(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^n \mu_i v_i = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) + \dots + (\lambda u_n + \mu v_n).$$

Or puisque F_i est un s.e.v., $\forall i = 1, n$, on a $\lambda u_i + \mu v_i \in F_i$. C'est-à-dire $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarques 2.21

- Avec les notations de la propriété, F peut être noté $\sum_{i=1}^n F_i$.
- On peut étendre la définition de somme à une famille $(F_i)_{i \in I}$ quelconque de s.e.v. de E . Dans ce cas, la somme des F_i est l'ensemble F des sommes à support fini $\sum_{i \in I} u_i$, où pour tout i de $I, u_i \in F_i$.
- En général, une réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est donc pas un sous-espace de E .

Propriété 2.22

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ une famille finie de n ($\in \mathbb{N}^*$) s.e.v. d'un K -e.v. E .

La somme $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les F_i .

C'est le s.e.v. de E engendré par la réunion des F_i c'est-à-dire $F = \text{Vect}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n)$.

Démonstration

- On a $F_i \subset F$, pour tout entier $i = 1, n$.
- Tout s.e.v. de E contenant tous les F_i doit être stable par somme.

Remarque 2.23

Soient u_1, u_2 et u_3 trois vecteurs d'un K -e.v. E . On a : $\langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_3 \rangle = \langle u_1 \rangle + \langle u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Cette propriété peut être facilement étendue à plus de trois vecteurs.

2.3 Sommes directes

Remarque 2.24

Dans \mathbb{R}^3 , soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$.

Tout vecteur $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire par exemple $v = (0,b,c/2) + (a,0,c/2)$.

Donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

Le vecteur $u = (1,1,1)$ peut s'écrire $(0,1,0) + (1,0,1)$ mais aussi $(0,1,1) + (1,0,0)$.

La décomposition de u n'est pas unique.

Définition 2.25

Soient F et G deux s.e.v. d'un K -e.v. E .

On dit que la somme $F + G$ est directe et on note $F \oplus G$ si et seulement si tout élément de $F + G$ admet une décomposition unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Exemples 2.26

- Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère $F = \{\lambda \times 1, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\mu \times X, \text{ où } \mu \in \mathbb{R}\}$.
 $F + G$ est l'e.v. des polynômes de degré ≤ 1 . La décomposition de tout vecteur de $F + G$ en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique.
- Dans l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^2 , on considère $F = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}\}$, on a $F + G = \mathbb{R}^2$ et la décomposition est unique.
- Dans l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 , on considère $F = \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\}$, on a $F + G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$ et la décomposition est unique.

Propriété 2.27

Soient F et G deux s.e.v. de E . La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration

(\Rightarrow) $\{0\} \in F \cap G$ (toujours). Soit $u \in F \cap G$, on a $u = 0 + u = u + 0$.

Avec dans le premier cas, $0 \in F$ et $u \in G$ et dans le deuxième cas $u \in F$ et $0 \in G$.

De part l'unicité de la décomposition, on a $u = 0$.

(\Leftarrow) On suppose qu'un vecteur u de $F + G$ se décompose sous la forme $u = u_1 + u_2$ et $u = u'_1 + u'_2$ avec $u_1, u'_1 \in F$ et $u_2, u'_2 \in G$.

On a donc $u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2$. Or $u_1 - u'_1 \in F$ et $u'_2 - u_2 \in G$.

Puisque $F \cap G = \{0\}$, on obtient $u_1 - u'_1 = 0 = u'_2 - u_2$.

C'est-à-dire $u'_1 = u_1$ et $u'_2 = u_2$: la décomposition est unique.

Définition 2.28

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ une famille finie de $n (\geq 3)$ s.e.v. d'un K -e.v. E .

On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^n F_i$ est directe si tout vecteur v de F s'écrit de manière unique sous la forme

$$v = \sum_{i=1}^n v_i, \text{ où pour tout } i = 1, n, v_i \in F_i.$$

On dit que v_i est la composante de v sur F_i relativement à cette somme directe.

La somme F est alors notée $F = \bigoplus_{i=1}^n F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$.

Remarque 2.29

Si $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de s.e.v. d'un K -e.v. E .

On a une définition similaire : la somme $F = \sum_{i \in I} F_i$ est directe si tout vecteur v de F s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme à support fini $\sum_{i \in I} u_i$, où pour tout i de I , $u_i \in F_i$.

La somme F est alors notée $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$.

Propriété 2.30

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ une famille finie de $n (\geq 2)$ s.e.v. d'un K -e.v. E .

La somme $F = \sum_{i=1}^n F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^n F_i, \text{ on a } u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0 \Rightarrow u_i = 0 \quad \forall i = 1, n.$$

Démonstration

(\Rightarrow) Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in F$.

On a : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0 = 0 + 0 + \dots + 0$ avec $0 \in F_i$.

De part l'unicité de la décomposition, on obtient le résultat.

(\Leftarrow) Supposons que l'on ait deux décompositions pour un même vecteur u de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$.

Nous allons montrer que ces deux décompositions sont les mêmes.

On suppose donc : $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n$ avec $u_i, u'_i \in F_i \quad \forall i = 1, n$.

On obtient alors $(u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) + \dots + (u_n - u'_n) = 0$ avec $u_i - u'_i \in F_i \quad \forall i = 1, n$.

D'où $u_i - u'_i = 0 \quad \forall i = 1, n$.

C'est-à-dire $u_i = u'_i \quad \forall i = 1, n$.

Remarque 2.31

On peut étendre ce résultat à une famille $(F_i)_{i \in I}$ quelconque de s.e.v. de E .

Dans ce cas, la somme $F = \sum_{i \in I} F_i$ est directe si et seulement si :

Pour toute famille (u_i) à support fini ($u_i \in F_i$ pour tout i), $\sum_{i \in I} u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, u_i = 0$.

Remarques 2.32

- Si la somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe, et si J est une partie de I , alors $\sum_{i \in J} F_i$ est directe.
En particulier, pour tous les indices distincts i et j , $F_i \cap F_j = \{0\}$.

- La réciproque est fautive.
Pour monter que F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe, avec $n \geq 3$, il ne suffit pas de vérifier que pour tous indices distincts i et j , $F_i \cap F_j = \{0\}$.
Ce serait encore pire de se contenter de vérifier que $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = \{0\}$.
- Une erreur classique consiste à écrire que la somme $F + G$ est directe si et seulement si l'intersection $F \cap G$ est vide!
L'intersection de deux s.e.v. de E n'est en effet jamais vide car elle contient toujours 0 .
Il faut en fait vérifier que l'intersection $F \cap G$ se réduit à $\{0\}$.

2.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.33

Soient F et G deux s.e.v. de E .

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

Cela signifie que tout vecteur u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

On dit alors que F est un supplémentaire de G dans E et que G est un supplémentaire de F dans E .

Exemple 2.34

Dans \mathbb{R}^2 , on considère les droites vectorielles obtenues par rotation de $\frac{\pi}{4}$ des vecteurs (\vec{i}, \vec{j}) .

On montre que ces droites sont supplémentaires.

Théorème 2.35

Soit F un s.e.v. de E . Alors F possède au moins un supplémentaire dans E .

Remarques 2.36

- Ce résultat est admis pour l'instant. Il sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.
- Si la somme $F + G$ est directe, alors F et G sont supplémentaires dans $F \oplus G$.
- Un même sous-espace F de E possède en général une infinité de supplémentaires dans E .
Il y a cependant deux cas d'unicité :
Si $F = E$, le seul supplémentaire de F dans E est $\{0\}$.
Si $F = \{0\}$, le seul supplémentaire de F dans E est E lui-même.
- On ne confondra pas supplémentaire et complémentaire!
Le complémentaire d'un sous-espace F de E est un ensemble sans grand intérêt en algèbre linéaire : ce n'est pas un s.e.v. de E car il ne contient pas le vecteur nul.

Exemples 2.37

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K , les sous-espaces $S_n(K)$ et $A_n(K)$ formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.
- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , les sous-espaces $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $I(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés respectivement des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

3. Applications linéaires

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K .

Soit f une application de E dans F .

On dit que f est linéaire si et seulement si : $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in K, f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Définitions 3.2

- On note $\mathcal{L}_K(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E, F)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps K l'ensemble des applications linéaires du K -e.v. E dans le K -e.v. F .
- Un endomorphisme d'un K -e.v. E est une application linéaire de E dans lui-même.
On note $\mathcal{L}_K(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme d'un K -e.v. E est un isomorphisme de E dans lui-même.
On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Exemples 3.3

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K .

- L'application nulle de E dans F est linéaire.
- L'application identité Id_E est une application linéaire et bijective de E dans E (automorphisme).
- Pour tout scalaire α , l'application $h_\alpha : u \mapsto \alpha u$ est un endomorphisme de E .
Pour tous scalaires α et β , $h_\alpha \circ h_\beta = h_{\alpha\beta}$.
Si $\alpha = 0$, h_α est simplement l'application nulle.
Si $\alpha \neq 0$, h_α est un automorphisme et $(h_\alpha)^{-1} = h_{1/\alpha}$.
On dit que h_α est l'homothétie vectorielle de rapport α .
- Soit I un intervalle de \mathbb{R} , non réduit à un point.
L'application qui, à une fonction f de I dans \mathbb{R} , associe sa dérivée f' est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur I dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
La restriction de cette application à $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un endomorphisme de E .
- $\varphi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
$$g \mapsto \int_0^1 g(t) dt$$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas linéaire. En effet, $f(2 + 5) = 49$ et $f(2) + f(5) = 29$.
$$x \mapsto x^2$$

Remarques 3.4

- Si f est une application linéaire, on dit aussi que f est un morphisme d'espaces vectoriels.
- f est linéaire de E dans F si et seulement si, $\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in K, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.
- Si f est linéaire, alors $f(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(u_i)$ pour toute combinaison linéaire.
Dans le cas fini : $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = f(\lambda_1 u_1) + f(\lambda_2 u_2) + \dots + f(\lambda_n u_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$.
- Si f est linéaire de E dans F , alors $f(0_E) = 0_F$. En effet, $f(0_E) = f(0_K \cdot 0_E) = 0_K \cdot f(0_E) = 0_F$.
Cette remarque est parfois utilisée pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

3.2 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 3.5

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K .

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F , et α, β deux scalaires.

Alors $\alpha f + \beta g$ est aussi une application linéaire de E dans F .

On en déduit que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur K .

Démonstration

(Rappel : Par définition, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(kf)(x) = k.f(x)$).

Soient $\lambda, \mu \in K$ et soient $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\lambda x + \mu y) &= (\alpha f)(\lambda x + \mu y) + (\beta g)(\lambda x + \mu y) = \alpha f(\lambda x + \mu y) + \beta g(\lambda x + \mu y). \\ &= \alpha(\lambda f(x) + \mu f(y)) + \beta(\lambda g(x) + \mu g(y)) = \alpha\lambda f(x) + \alpha\mu f(y) + \beta\lambda g(x) + \beta\mu g(y). \\ &= \lambda(\alpha f(x) + \beta g(x)) + \mu(\alpha f(y) + \beta g(y)) = \lambda(\alpha f + \beta g)(x) + \mu(\alpha f + \beta g)(y).\end{aligned}$$

Propriété 3.6

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un même corps K .

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Démonstration

Soient $\lambda, \mu \in K$ et soient $x, y \in E$.

$$(g \circ f)(\lambda x + \mu y) = g(f(\lambda x + \mu y)) = g(\lambda f(x) + \mu f(y)) = \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) = \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y).$$

Remarques 3.7

- Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un même corps K .
Si $f \in \mathcal{L}(F, G)$ et si $g, h \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
En effet :
 $\forall x \in E, [f \circ (g + h)](x) = f[(g + h)(x)] = f[g(x) + h(x)] = f[g(x)] + f[h(x)] = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)$
- Soit f un endomorphisme de E et n un entier naturel.
Alors $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois) est un endomorphisme de E .
- Dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, on peut utiliser la formule du binôme $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^k \circ g^{n-k})$, à condition que les applications f et g commutent.
Par exemple, les applications h_λ commutent avec tous les endomorphismes de E .

Propriété 3.8

Soit f un isomorphisme de E sur F .

Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

Démonstration

f est bijective (donc surjective) d'où, pour tous $z, t \in F$, il existe $x, y \in E$ tels que $f(x) = z$ et $f(y) = t$.

C'est-à-dire $f^{-1}(z) = x$ et $f^{-1}(t) = y$.

$$\text{Donc } \forall \lambda, \mu \in K, f^{-1}(\lambda z + \mu t) = f^{-1}[\lambda f(x) + \mu f(y)] = f^{-1}[f(\lambda x + \mu y)] = \lambda x + \mu y = \lambda f^{-1}(z) + \mu f^{-1}(t).$$

Remarque 3.9

Si f et g sont deux automorphismes d'un K -e.v. E , alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E . On en déduit que $(\mathcal{S}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre sur K . En général, cette algèbre n'est pas commutative. En particulier, $GL(E)$ est un groupe (en général, non commutatif) pour la loi de composition des applications.

3.3 Noyau et image

Propriété 3.10

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K . Soit f un morphisme de E dans F .

- Si E' est un sous-espace de E , alors $f(E')$ est un sous-espace de F .
- Si F' est un sous-espace de F , alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace de E .

Démonstration

- Soit E' un s.e.v. de E .
 - ◇ $0_E \in E'$ car E' s.e.v. de E et $f(0_E) = 0_F$ donc $f(E') \neq \emptyset$.
 - ◇ Soient $y, y' \in f(E')$.
 $\exists x \in E' / y = f(x)$ et $\exists x' \in E' / y' = f(x')$.
 $\forall \lambda, \mu \in K, \lambda y + \mu y' = \lambda f(x) + \mu f(x') = f(\lambda x + \mu x')$.
Or $\lambda x + \mu x' \in E'$ car E' s.e.v. donc $\lambda y + \mu y' \in f(E')$.
- Soit F' un s.e.v. de F .
 - ◇ $0_F \in F'$ car F' s.e.v. de F et $f(0_E) = 0_F$ donc $f^{-1}(F') \neq \emptyset$.
 - ◇ Soient $x, x' \in f^{-1}(F')$ c'est-à-dire $f(x) \in F'$ et $f(x') \in F'$.
 $\forall \lambda, \mu \in K, f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x')$.
Or $\lambda f(x) + \mu f(x') \in F'$ car F' s.e.v. donc $f(\lambda x + \mu x') \in F'$.
C'est-à-dire $\lambda x + \mu x' \in f^{-1}(F')$.

Définitions 3.11

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K .

Soit f un morphisme de E vers F .

- L'ensemble $f(E) = \{v \in F / \exists u \in E \text{ et } v = f(u)\} = \{f(u), u \in E\}$ est un s.e.v. de F .
On l'appelle image de f et on le note $\text{Im} f$.
- L'ensemble $f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$ est un s.e.v. de E .
On l'appelle noyau de f et on le note $\text{Ker} f$.

Remarques 3.12

- Avec les notations de la définition, on a : f surjective $\Leftrightarrow \text{Im} f = F$.
- On peut parfois montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un s.e.v. en l'interprétant comme le noyau ou l'image d'une application linéaire.
Par exemple, soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E , et soit λ un scalaire.
Notons E_λ l'ensemble des vecteurs u de E tels que $f(u) = \lambda u$.
On constate que $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id})(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$.
On en déduit que E_λ est un s.e.v. de E .
C'est le cas en particulier pour $\text{Inv}(f) = E_1$ (vecteurs invariants) et pour $\text{Opp}(f) = E_{-1}$ (vecteurs changés en leur opposé par f).

Propriété 3.13

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K . Soit f un morphisme de E dans F .
 f est injective si et seulement si son noyau $\text{Ker}(f)$ se réduit à $\{0_E\}$.

Démonstration

- (\Rightarrow) $x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = f(0_E)$.
 f injective $\Rightarrow x = 0_E \Rightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.
- (\Leftarrow) $x, x' \in F / f(x) = f(x') \Rightarrow f(x) - f(x') = 0_F \Rightarrow f(x - x') = 0_F$.
Or $\text{Ker } f = \{0\}$ donc $x - x' = 0_E \Rightarrow x = x'$.

Remarque 3.14

Autrement dit, f est injective si et seulement si $(\forall u \in E) f(u) = 0_F \Rightarrow u = 0_E$.

3.4 Projections et symétries vectorielles

Définition 3.15

Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E .

Pour tout vecteur u de E : $\exists ! v \in F, \exists ! w \in G$ tels que $u = v + w$.

- L'application $p : u \mapsto p(u) = v$ est appelée la projection sur F , parallèlement à G .
- L'application $s : u \mapsto s(u) = v - w$ est appelée la symétrie par rapport à F , parallèlement à G .

Remarques 3.16

Avec les notations précédentes,

- p est un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$.
L'image de p est F et son noyau est G .
 F est aussi le s.e.v. des vecteurs invariants par p .
- s est un automorphisme de E , et $s \circ s = \text{Id}$.
Ainsi s est involutif : $s^{-1} = s$.
On a la relation $s = 2p - \text{Id}$, qui s'écrit encore $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id})$.
 G est le sous-espace des vecteurs changés en leur opposé par s .
 F est le sous-espace des vecteurs invariants par s .
- Si on note p' la projection sur G parallèlement à F , et s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F , alors $p + p' = \text{Id}$, $p \circ p' = p' \circ p = 0$ et $s + s' = 0$, $s \circ s' = s' \circ s = -\text{Id}$.

Exemple 3.17

On considère la somme directe $E = E \oplus \{0\}$.

On pose $F = E$ et $G = \{0\}$.

Soient p la projection sur F parallèlement à G

s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

p' la projection sur G parallèlement à F

s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

On obtient : $p = \text{Id}$ (c'est le seul cas où une projection vectorielle est injective) et $s = \text{Id}$.

$p' = 0$ et $s' = -\text{Id}$ (en effet $x = x + 0$).

Définition 3.18

Soit E un espace vectoriel sur K .

On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Propriété 3.19

Si p est un projecteur de E , alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.

L'application p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Démonstration

Soit p un projecteur de E . Pour tout $u \in E$, on a $u = u - p(u) + p(u)$.

On a bien $p(u) \in \text{Im } p$.

$p(u - p(u)) = p(u) - p(p(u)) = p(u) - p(u) = 0$ donc $u - p(u) \in \text{Ker } p$.

C'est-à-dire $E = \text{Ker } p + \text{Im } p$.

Il reste à vérifier que $\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \{0\}$.

Soit $u \in \text{Ker } p \cap \text{Im } p$.

$u \in \text{Im } p \Rightarrow \exists t \in E / u = p(t)$.

$u \in \text{Ker } p \Rightarrow p(u) = 0 \Rightarrow p(p(t)) = 0 \Rightarrow p(t) = 0$
 $\Rightarrow u = 0$.

4. Familles libres, génératrices, bases

Toutes les sommes considérées dans cette partie sont à support fini.

4.1 Familles libres

Définition 4.1

Soit E un espace vectoriel sur K .

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est libre, ou encore que les vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants si, pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $K^{(I)}$ (c'est-à-dire à support fini), nous avons :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0$, on dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée, ou encore que les vecteurs qui la composent sont linéairement dépendants.

Exemple 4.2

Soient $u = (1, 1)$ et $v = (2, 3)$ dans \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + \mu v = 0 &\Rightarrow \lambda(1, 1) + \mu(2, 3) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda, \lambda) + (2\mu, 3\mu) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu) = (0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \lambda = \mu = 0 \end{aligned}$$

Remarques 4.3

- On ne doit pas confondre non tous nuls et tous non nuls.
- La famille (u_1, u_2, \dots, u_n) est libre si $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.
- La famille (u_1, u_2, \dots, u_n) est liée si :
Il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, l'un au moins étant non nul, tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$.
Si, par exemple, $\lambda_1 \neq 0$, alors $u_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i$.
- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs qui la compose peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.
- Une famille réduite à un seul vecteur u est libre si et seulement si u est non nul.
- Une famille de deux vecteurs u et v est liée si et seulement si u et v sont colinéaires, ou encore proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$. Cela ne se généralise pas aux familles de plus de deux vecteurs.
- Attention à ne pas dire que u et v sont liés si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$, car c'est faux si $v = 0$ et $u \neq 0$ (en revanche c'est vrai si $v \neq 0$).
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Cela équivaut à dire que toute sur-famille d'une famille liée est liée.
En particulier toute famille contenant 0 , ou deux vecteurs colinéaires, est liée.

Exemples 4.4

- Les vecteurs $u = (-1, 1)$ et $v = (1, 1)$ de \mathbb{R}^2 sont linéairement indépendants.
- Les vecteurs $u = (-1, 1, 1)$, $v = (-1, 2, 3)$ et $w = (2, -1, 0)$ de \mathbb{R}^3 sont linéairement dépendants car $w = v - 3u$.
- (X, X^2) forment une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
- $(X^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
- (\sin, \cos) est une famille libre de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
(Il suffit de prendre $x = 0$ et $x = \pi / 2$ par exemple).
- Dans l'espace vectoriel $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K , toute famille de polynômes dont les degrés sont différents deux à deux est libre.
C'est le cas pour la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\deg P_0 < \deg P_1 < \dots < \deg P_n < \dots$
On parle alors de famille de polynômes à degrés échelonnés.

Propriétés 4.5

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et f un morphisme de E dans F .

Soit $(u_i)_{i=1, p}$ une famille finie d'éléments de E .

- Si la famille $(u_i)_{i=1, p}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i=1, p}$ est liée.
- Si la famille $(f(u_i))_{i=1, p}$ est libre, la famille $(u_i)_{i=1, p}$ est libre.
- Si la famille $(u_i)_{i=1, p}$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(u_i))_{i=1, p}$ est libre.

Démonstration

- Si une famille (quelconque, voir remarque 4.4) $(u_i)_{i \in I}$ est liée, l'un des u_i est une C.L. des autres. C'est-à-dire il existe un ensemble J fini tel que $J \subset I, i_0 \in I \setminus J$ et une famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ d'éléments de K tels que $u_{i_0} = \sum_{j \in J} \lambda_j u_j$.
On a donc $f(u_{i_0}) = f(\sum_{j \in J} \lambda_j u_j) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(u_j)$. C'est-à-dire $f(u_{i_0})$ C.L. des $(u_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ d'où $(f(u_i))_{i \in I}$ liée.

- Contraposée.
- Soit (v_1, v_2, \dots, v_n) une famille libre de E .

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Ker } f.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \text{ car } f \text{ est injective}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \text{ car } (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ est libre. Donc } (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \text{ est libre.}$$

Remarque 4.6

On peut étendre ces résultats à une famille quelconque $(u_i)_{i \in I}$:

- Toute application linéaire transforme une famille liée en une famille liée.
- Une application linéaire injective transforme une famille libre en une famille libre.

4.2 Familles génératrices

Définition 4.7

Soit E un espace vectoriel sur K .

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est génératrice de E , ou encore que les vecteurs de cette famille engendrent E si et seulement $\text{Vect}(\{u_i, i \in I\}) = E$, c'est-à-dire : $\forall v \in E, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)} / v = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$.

Remarques 4.8

La famille (u_1, u_2, \dots, u_n) est génératrice dans E si, pour tout vecteur v de E , il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

Exemples 4.9

- $(1,0,0), (0,1,0)$ et $(0,0,1)$ engendrent \mathbb{R}^3 .
- $(1,0,0), (1,1,0)$ et $(1,1,1)$ engendrent \mathbb{R}^3 .
- $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ et $(1,2,1)$ engendrent \mathbb{R}^3 .
- $\{1, 1 + X, 1 + X + X^2\}$ engendre $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq 2\} = \{aX^2 + bX + c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
En effet, $aX^2 + bX + c = a(1 + X + X^2) + (b - a)(1 + X) + (c - b)(1)$.

Remarques 4.10

- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice.
- Soient E un espace vectoriel sur K et F un s.e.v. strict de E ($F \subsetneq E$). Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Le caractère libre ou non de cette famille ne dépend pas de l'espace vectoriel, F ou E , auxquels ils sont censés appartenir (c'est faux si l'on change de corps, par exemple $(1,0)$ et $(i,0)$ sont libres dans \mathbb{C} considéré comme \mathbb{C} -e.v. mais pas comme \mathbb{R} -e.v.). En revanche, si cette famille est génératrice dans F , elle ne l'est pas dans E . Il faudra donc préciser dans quel espace vectoriel une famille de vecteurs est génératrice surtout lorsqu'il y a un risque d'ambiguïté.

Propriété 4.11

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$. Soit $(u_i)_{i=1, p}$ une famille finie de E .

- Si la famille $(u_i)_{i=1, p}$ est génératrice (de E) alors la famille $(f(u_i))_{i=1, p}$ est génératrice de $\text{Im } f$.
- Si la famille $(u_i)_{i=1, p}$ est génératrice (de E) et si f est surjective, alors la famille $(f(u_i))_{i=1, p}$ est génératrice de F .

Démonstration

Cas famille quelconque (voir remarque 4.12).

- Soit $v \in \text{Im} f$. Il faut montrer que v est une C.L. des $(f(u_i))_{i \in I}$.
Par définition, $v \in \text{Im} f \Rightarrow \exists u \in E / v = f(u)$.
Puisque $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , il existe un ensemble J fini tel que $J \subset I$ et $(\lambda_j)_{j \in J}$ famille de K tels que $u = \sum_{j \in J} \lambda_j u_j$. Donc $v = \sum_{j \in J} \lambda_j f(u_j)$.
- Si f surjective, $f(E) = \text{Im} f = F$.

Remarque 4.12

On peut étendre ces résultats à une famille quelconque $(u_i)_{i \in I}$: on peut donc dire qu'une application linéaire surjective transforme une famille génératrice de l'ensemble de départ en une famille génératrice de l'ensemble d'arrivée..

4.3 Bases

Définition 4.13

Soit E un espace vectoriel sur K .

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E .

Exemples importants 4.14

- (1) est une base de \mathbb{R} . Elle est appelée la base canonique de \mathbb{R} .
- $((1,0),(0,1))$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 .
- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- $\{1, X, X^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Propriété 4.15

Une famille $(u) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur v de E , il existe un n -uplet unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de K^n tel que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$. Les coefficients λ_i sont appelés composantes, ou

coordonnées, de v dans la base $(u_i)_{i=1, \dots, n}$. On note alors $[v]_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Démonstration

Puisqu'une base est une famille libre et génératrice, il suffit de montrer que dans le cas d'une famille génératrice, on a l'équivalence entre la liberté et l'unicité de la décomposition.

(\Rightarrow) Supposons qu'un vecteur v admet deux décompositions :

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i \text{ où } \lambda_i, \mu_i \in K, \forall i = 1, \dots, n. \text{ On obtient donc } \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) u_i = 0.$$

Puisque (u) est une famille libre, on a donc $\lambda_i - \mu_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$ c'est-à-dire $\lambda_i = \mu_i$.

(\Leftarrow) On suppose que tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs u_i . On a $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0 = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n$.

La décomposition étant unique cela implique bien que, $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ et donc que (u) est libre.

Remarques 4.16

- Une famille (quelconque) $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs u_i .
- Si (i, j, k) forment une base de E , et si les coordonnées d'un vecteur v dans cette base sont (a, b, c) (c'est-à-dire si $v = ai + bj + ck$), alors (j, k, i) forment une base de E dans laquelle les coordonnées de v sont (b, c, a) .
Conclusion : deux bases se déduisant l'une de l'autre par modification de l'ordre des vecteurs doivent être considérées comme différentes.
- La famille des polynômes $(X^k)_{k \in \mathbb{N}} = (1, X, X^2, \dots, X^i, \dots)$ est une base de $K[X]$.
On l'appelle la base canonique de $K[X]$.
- La famille des polynômes $(X^k)_{k=0, n} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est la base canonique de $K_n[X]$.

Propriété 4.17

Soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un K -e.v. E avec $n \geq 1$.

Soient u_1, u_2, \dots, u_p ($p \geq 1$) vecteurs de E de coordonnées respectives $[u_1]_e, [u_2]_e, \dots, [u_p]_e \in K^n$ dans (e) .

(u_1, u_2, \dots, u_p) libre $\Leftrightarrow ([u_1]_e, [u_2]_e, \dots, [u_p]_e)$ libre.

(u_1, u_2, \dots, u_p) engendre $E \Leftrightarrow ([u_1]_e, [u_2]_e, \dots, [u_p]_e)$ engendre K^n .

Propriétés 4.18

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K . On suppose que E est muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$.

Pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F , il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$. De plus :

- f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice de F .
- f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de F .

Démonstration

Soit g est une application linéaire de E vers F où E est de dimension finie et soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ telle que $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

D'où $g(x) = g(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = g(x_1 e_1) + g(x_2 e_2) + \dots + g(x_n e_n) = x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + \dots + x_n g(e_n)$.

C'est-à-dire $g(x) = g(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n g(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i g(e_i)$.

Cela signifie que si l'on connaît les $(g(e_i))_{i=1, n}$, on connaît g : une application linéaire est définie de manière unique par la donnée des images des vecteurs d'une base.

Nous avons vu (propriétés 4.5 et 4.10) que : $(f \text{ injective} \Rightarrow (v_i)_{i \in I} \text{ libre})$ et $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im} f$.

Pour obtenir les trois points, il reste juste à montrer que : $(v_i)_{i \in I} \text{ libre} \Rightarrow f \text{ injective}$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \text{Ker} f$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1, n \text{ car } (v_i)_{i \in I} \text{ libre} \Rightarrow x = 0.$$

Donc $\text{Ker} f = \{0\}$ c'est-à-dire f injective.

Remarque 4.19

Un morphisme f de E vers F est un isomorphisme si et seulement si f transforme une base de E en une base de F . L'application f transforme alors toute base de E en une base de F .

5. Espaces vectoriels de dimension finie

5.1 Notion de dimension finie

Définition 5.1

Soit E un K -espace vectoriel.

On dit que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

Remarques 5.2

- Avec cette définition, l'espace réduit à $\{0\}$ est de dimension finie.
- Si un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, il est dit de dimension infinie. C'est le cas de l'espace vectoriel $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K .

Propriété 5.3

De toute famille génératrice d'un espace vectoriel non nul de dimension finie, on peut extraire une base.

Remarque 5.4

On a précisé $E \neq \{0\}$ car dans l'espace $\{0\}$ il n'y a même pas de famille libre!

Démonstration

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une famille génératrice de n vecteurs de E .

Pour tout vecteur non nul x de E , x est une C.L. des $(e_i)_{i=1,n}$, il existe donc une famille $(\lambda_i)_{i=1,n}$ d'éléments de K tels que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Puisque x est non nul, il existe $j_1 = 1, n$ tel que $\lambda_{j_1} \neq 0$ et $e_{j_1} \neq 0$.

On pose $e'_1 = e_{j_1}$ et $B_1 = \{e'_1\}$ et $G_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \setminus \{e'_1\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \setminus B_1$.

Puisque e'_1 est non nul, B_1 est libre.

Si B_1 est génératrice, le théorème est démontré.

Si B_1 n'est pas génératrice, il existe $e_{j_2} \in G_1$ tel que $\{e_{j_1}, e_{j_2}\}$ soit une famille libre. En effet, dans le cas contraire, tous les éléments de G_1 seraient colinéaires à e_{j_1} . Ce serait aussi le cas de x . Or nous sommes dans le cas où B_1 n'est pas génératrice.

On pose $e'_2 = e_{j_2}$ et $B_2 = \{e'_1, e'_2\}$ et $G_2 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \setminus \{e'_1, e'_2\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \setminus B_2$.

Si B_2 est génératrice, le théorème est démontré.

Si B_2 n'est pas génératrice, il existe $e_{j_3} \in G_2$ tel que $\{e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}\}$ soit une famille libre. En effet, dans le cas contraire, tous les éléments de G_2 seraient des C.L. de $\{e_{j_1}, e_{j_2}\}$. Ce serait aussi le cas de x . Or nous sommes dans le cas où B_2 n'est pas génératrice.

On continue ainsi.

On construit une suite de famille libre : $B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots \subset \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ jusqu'à obtenir une famille génératrice. Puisque $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une famille finie. Ce processus se termine.

Plus précisément, nous avons :

Théorème 5.5

Dans tout espace vectoriel E de dimension fini non réduit à $\{0\}$, il existe des bases.

Propriété 5.6

Soit E un espace vectoriel sur K .

Soit $(e_i)_{i=1,n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une famille de n vecteurs de E .

Si $(e_i)_{i=1,n}$ est génératrice dans E , toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.

Démonstration

Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une famille de m ($> n$) vecteurs de E .

Si l'un des v_i est nul, la famille $(v_i)_{i=1,m}$ est liée et la démonstration est terminée.

On suppose donc que $\forall i=1,n, v_i \neq 0$.

Puisque la famille $(e_i)_{i=1,n}$ est génératrice, il existe donc une famille $(\lambda_{1,i})_{i=1,n}$ d'éléments de K tels que

$$v_1 = \lambda_{1,1}e_1 + \lambda_{1,2}e_2 + \dots + \lambda_{1,n}e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_{1,i} e_i.$$

Puisque $v_1 \neq 0$, il existe un entier j compris entre 1 et n tel que $\lambda_{1,j} \neq 0$.

Sans perte de généralité (on reverra la situation), on peut supposer que $\lambda_{1,1} \neq 0$.

On a alors $e_1 = \frac{1}{\lambda_{1,1}}(v_1 - \lambda_{1,2}e_2 - \lambda_{1,3}e_3 - \dots - \lambda_{1,n}e_n)$.

Pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ de E , on a donc :

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n = \frac{\mu_1}{\lambda_{1,1}}(v_1 - \lambda_{1,2}e_2 - \lambda_{1,3}e_3 - \dots - \lambda_{1,n}e_n) + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_{1,1}} v_1 + \sum_{i=2}^n \left(\mu_i - \frac{\lambda_{1,i}}{\lambda_{1,1}} \mu_1 \right) e_i \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que x est une C.L. de $\{v_1, e_2, \dots, e_n\}$ c'est-à-dire $\{v_1, e_2, \dots, e_n\}$ famille génératrice de E . (Si, par exemple, on avait choisi $\lambda_{1,2} \neq 0$ à la place de $\lambda_{1,1}$, on aurait obtenu $\{v_1, e_1, e_3, \dots, e_n\}$ famille génératrice de E .)

On continue ainsi. Puisque $\{v_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de E , il existe donc une famille $(\lambda_{2,i})_{i=1,n}$ d'éléments de K tels que $v_2 = \lambda_{2,1}v_1 + \lambda_{2,2}e_2 + \dots + \lambda_{2,n}e_n$.

Si $\lambda_{2,1} = \lambda_{2,2} = \dots = \lambda_{2,n} = 0$, on aurait $v_2 = \lambda_{2,1}v_1$ ce qui signifie que la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est liée et cela terminerait la démonstration.

Sinon, il existe un entier j compris entre 2 et n tel que $\lambda_{2,j} \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit de $\lambda_{2,2}$. On obtient $e_2 = \frac{1}{\lambda_{2,2}}(v_2 - \lambda_{2,1}v_1 - \lambda_{2,3}e_3 - \dots - \lambda_{2,n}e_n)$.

Pour tout vecteur x de E , puisque $\{v_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de E , x est une C.L. de $\{v_1, e_2, \dots, e_n\}$. Puisque e_2 est une C.L. de $\{v_1, v_2, e_3, \dots, e_n\}$, x est une C.L. de $\{v_1, v_2, e_3, \dots, e_n\}$.

C'est-à-dire $\{v_1, v_2, e_3, \dots, e_n\}$ est une famille génératrice de E .

On continue ainsi de suite jusque v_n .

Soit, dans une des étapes, on obtient que la famille est liée ce qui termine la démonstration.

Soit on obtient que la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une famille génératrice de E .

Dans ce cas, puisque $m > n$, v_{n+1} existe et v_{n+1} est donc une C.L. de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

La famille $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ est donc liée.

Corollaire 5.7

Soit E un espace vectoriel sur K .

Soit $(e_i)_{i=1,n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une famille de n vecteurs de E .

Si $(e_i)_{i=1,n}$ est libre, aucune famille de moins de n vecteurs n'est génératrice dans E .

Démonstration

Si on avait une famille de moins de n vecteurs qui soit génératrice, on pourrait en extraire une base. Toute famille contenant plus de vecteurs serait donc liée.

Théorème 5.8

Si E est un K -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, alors toutes les bases de E sont finies et elles ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E et est noté $\dim E$.

Démonstration

Soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de n vecteurs de E . Soit (e') une autre base de E .

Si (e') possédait plus de n vecteurs, elle ne serait pas libre. Si (e') possédait moins de n vecteurs, elle ne serait pas génératrice.

Remarques 5.9

- Par convention, $\dim \{0\} = 0$.
- On appelle droite vectorielle tout espace vectoriel E de dimension 1. Tout vecteur non nul u de E constitue alors une base de E , et $E = \{\lambda u, \lambda \in K\}$.
- On appelle plan vectoriel tout espace vectoriel E de dimension 2. Deux vecteurs u et v non proportionnels forment alors une base de E et $E = \{\lambda u + \mu v, \lambda \in K, \mu \in K\}$.
- La dimension d'un espace vectoriel E dépend du corps de base. Si E est un espace de $\dim n$ sur \mathbb{C} , c'est un espace de dimension $2n$ sur \mathbb{R} . Par exemple, \mathbb{C} est une droite vectorielle sur \mathbb{C} et un plan vectoriel sur \mathbb{R} . Pour éviter toute ambiguïté, on note parfois $\dim_K(E)$.

Exemples 5.10

- K^n est un espace vectoriel sur K , de dimension n . Une base de K^n est la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. On l'appelle la base canonique de K^n . Les coordonnées de $u = (x_1, \dots, x_n)$ dans cette base sont (x_1, \dots, x_n) , car $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.
- L'ensemble $K_n[X]$ des polynômes à coefficients dans K et de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel sur K , de dimension $n + 1$. Une base de $K_n[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- Si E et F sont deux K -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p , alors l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est de dimension $n \times p$.
- Si E et F sont deux K -e.v. de dimensions respectives n et p , alors on a $\dim(E \times F) = n + p$. Plus généralement, pour une famille E_1, E_2, \dots, E_m d'espaces vectoriels sur le même corps, on a : $\dim(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m) = \sum_{i=1}^m \dim(E_i)$ et $\dim(E^m) = m \times \dim(E)$.

Théorème 5.11

 Théorème de la base incomplète

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit (e) une famille génératrice finie de E .

Soit (u) une famille libre de E , non génératrice. Alors il est possible de compléter la famille (u) à l'aide de vecteurs de la famille (e) , de manière à former une base de E .

Propriété 5.12

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Soit $(u) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n éléments de E .

(u) est une base $\Leftrightarrow (u)$ est libre

$\Leftrightarrow (u)$ est génératrice.

Démonstration

Il suffit de montrer (u) libre $\Rightarrow (u)$ base

(u) génératrice $\Rightarrow (u)$ base

- Si (u) est une famille libre, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter (u) en une base. Mais toute base de E contient n vecteurs.
Donc on ne peut pas ajouter de vecteur pour obtenir une base.
C'est donc que (u) est déjà une base.
- Si (u) est une famille génératrice, on peut en extraire une base.
Or cette base doit contenir n éléments!!!

Remarque 5.13

La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est donc :

Le nombre minimum d'éléments d'une famille génératrice de cet e.v.

Le nombre maximum d'éléments d'une famille libre de cet e.v.

5.2 Sous-espaces de dimension finie

Propriété 5.14

Soit F un s.e.v. d'un K -e.v. E de dimension finie.

Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

On a l'égalité $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Démonstration

Soit $n = \dim E$.

Si $F = \{0\}$, on obtient trivialement le résultat.

Si $F \neq \{0\}$, soit $(e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ une base de F .

$(e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ est une famille libre de F et donc de E . On obtient donc $p \leq n$.

Si $p = n$, $(e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ est une famille libre de E possédant n éléments, c'est donc une base de E .

Définition 5.15

Soit $(u_i)_{i=1,p} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur K .

On appelle rang de la famille $(u_i)_{i=1,p}$ et on note $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ la dimension du s.e.v. de E engendré par cette famille.

C'est-à-dire, $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_p\})$.

Remarques 5.16

- $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est le nombre maximal de vecteurs libres de la famille (u_1, u_2, \dots, u_p) .
- On a $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq p$, avec l'égalité si et seulement si la famille (u) est libre.
- Si $\dim(E) = n$, alors $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq n$, avec l'égalité si et seulement si la famille $(u_i)_{i=1,p}$ est génératrice dans E .

Exemples 5.17

On considère dans \mathbb{R}^3 la famille A dans les cas suivants :

- $A = \{(1,2,-3); (-2,-4,6)\}$ $\text{rg}(A) = 1$
- $A = \{(1,2,-3); (-1,0,5)\}$ $\text{rg}(A) = 2$
- $A = \{(1,2,-3); (-1,0,5); (0,2,2)\}$ $\text{rg}(A) = 2$
- $A = \{(1,2,-3); (-1,0,5); (0,2,3)\}$ $\text{rg}(A) = 3$
- $A = \{(1,2,-3); (-1,0,5); (0,2,3); (4,-1,5)\}$ $\text{rg}(A) = 3$
- $A = \{(1,2,-3); (-1,0,5); (0,2,2); (1,4,-1)\}$ $\text{rg}(A) = 2$

Propriété 5.18

Soient F et G deux s.e.v. de dimensions finies d'un K -e.v. E .

- Dans le cas général, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration

Supposons que $\dim(F) = p$, $\dim(G) = q$ et $\dim(F \cap G) = r$.

Plus précisément, soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $F \cap G$.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ est une famille libre de $F \cap G$ et donc de F et G .

On peut compléter cette famille en une base de F et en une base de G .

Soient $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_p)$ une base de F et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_q)$ une base de G .

On considère la famille $(B) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_p, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_q)$.

Nous allons montrer que (B) est une base de $F + G$.

Puisque (B) contient $r + (p - r) + (q - r) = p + q - r$ éléments, cela terminera la démonstration.

Famille génératrice :

Tout vecteur x de $F + G$ s'écrit comme somme d'une C.L. d'une base F et d'une C.L. d'une base G . $x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_r \varepsilon_r + \lambda_{r+1} a_{r+1} + \lambda_{r+2} a_{r+2} + \dots + \lambda_p a_p + \mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2 + \dots + \mu_r \varepsilon_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \mu_{r+2} b_{r+2} + \dots + \mu_q b_q$. x est donc une C.L. de (B) est une famille génératrice de $F + G$.

Famille libre :

$\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_r \varepsilon_r + \lambda_{r+1} a_{r+1} + \lambda_{r+2} a_{r+2} + \dots + \lambda_p a_p + \lambda_{p+1} b_{r+1} + \lambda_{p+2} b_{r+2} + \dots + \lambda_{p+q} b_q = 0$.

Si on pose $u = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \dots + \lambda_r \varepsilon_r$, $v = \lambda_{r+1} a_{r+1} + \lambda_{r+2} a_{r+2} + \dots + \lambda_p a_p$ et $w = \lambda_{p+1} b_{r+1} + \dots + \lambda_{p+q} b_q$, on a $u + v + w = 0$. Donc $w = -u - v$ avec $w \in F$ et $-u - v \in G$. D'où $w \in F \cap G$.

w est donc une C.L. des $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ i.e. : $w = \mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2 + \dots + \mu_r \varepsilon_r$.

De $w = \lambda_{p+1} b_{r+1} + \lambda_{p+2} b_{r+2} + \dots + \lambda_{p+q} b_q = \mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2 + \dots + \mu_r \varepsilon_r$ et puisque $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_q)$ est une base de G , on tire que $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_{p+q} = 0$ c'est-à-dire $w = 0$.

Donc $u + v = 0$ avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_p)$ une base de F .

Ce qui signifie que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Corollaire 5.19

Soient F_1, F_2, \dots, F_p une famille de p s.e.v. de dimension finie d'un K -e.v. E .

- On a toujours $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.
- On a l'égalité $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

Propriétés 5.20

Soit E un K -espace vectoriel (de dimension ≥ 1).

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , de dimension finie, en somme directe.

Soit $(e') = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ une famille finie d'éléments de F .

Soit $(e'') = (e''_1, e''_2, \dots, e''_q)$ une famille finie d'éléments de G .

On forme la famille $(e) = (e') \cup (e'')$ en juxtaposant les familles (e') et (e'') .

- Si les familles (e') et (e'') sont libres, alors la famille (e) est libre.
- Si (e') engendre F et (e'') engendre G , alors (e) engendre $F \oplus G$.
- Si (e') est une base de F et si (e'') est une base de G , alors (e) est une base de $F \oplus G$.

Démonstration

- $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \dots + \lambda_p e'_p + \lambda_{p+1} e''_1 + \lambda_{p+2} e''_2 + \dots + \lambda_{p+q} e''_q = 0$.
 $\Rightarrow \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \dots + \lambda_p e'_p = -\lambda_{p+1} e''_1 - \lambda_{p+2} e''_2 - \dots - \lambda_{p+q} e''_q$
 Or $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \dots + \lambda_p e'_p \in F$, $-\lambda_{p+1} e''_1 - \lambda_{p+2} e''_2 - \dots - \lambda_{p+q} e''_q \in G$ et $F \cap G = \{0\}$.
 Donc $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \dots + \lambda_p e'_p = 0$ et $\lambda_{p+1} e''_1 + \lambda_{p+2} e''_2 + \dots + \lambda_{p+q} e''_q = 0$
 Ce qui implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ et $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_{p+q} = 0$ car (e') et (e'') sont libres.
- Tout élément de $F + G$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G . C'est-à-dire la somme d'une C.L. de (e') et d'une C.L. de (e'') donc une C.L. de (e) .

Remarque 5.21

Inversement, si (e) est une base de F , si (e'') est une base de G et si $(e) = (e') \cup (e'')$ est une famille libre alors la somme $F \oplus G$ est directe.

Corollaire 5.22

Soit E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Soient F_1, F_2, \dots, F_p des sous-espaces de E , de dimension finie, en somme directe.

Pour tout j de $\{1, \dots, p\}$, soit $(e)_j$ une famille de vecteurs de F_j .

On forme la famille $(e) = (e)_1 \cup (e)_2 \cup \dots \cup (e)_p$ en juxtaposant les familles $(e)_j$.

- Si chaque famille $(e)_j$ est libre, la famille (e) est libre.
- Si chaque $(e)_j$ engendre le sous-espace F_j correspondant, (e) engendre $\bigoplus F_j$.
- Si chaque $(e)_j$ est une base du sous-espace F_j correspondant, (e) est une base de $\bigoplus F_j$.
 Ceci est particulièrement intéressant si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, car on obtient alors une base de E , qui est dite adaptée à la somme directe.

Remarque 5.23

Soient F_1, F_2, \dots, F_p des sous-espaces de E , de dimension finie, qui ne sont pas en somme directe.

Même si chaque $(e)_j$ est une base du sous-espace F_j correspondant, (e) n'est pas nécessairement une famille libre.

5.3 Applications linéaires et dimension finie

Propriété 5.24

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K , E étant de dimension finie.

Alors E et F sont isomorphes (c'est-à-dire il existe un isomorphisme de E sur F) si et seulement si F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Démonstration

(\Rightarrow) Proposition 4.17

(\Leftarrow) On choisit une base de E et une base de F et on considère l'application qui au premier élément de la base de E (s'il existe) associe le premier élément de la base de F (s'il existe). Au deuxième, le deuxième etc....

Exemple 5.25

L'isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3 défini par $\varphi(aX^2 + bX + c) = (c, b, a)$.

Remarque 5.26

Tout K -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, est isomorphe à K^n .

Si $(u) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E , l'application φ définie par $\varphi((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^n x_k u_k$ est un isomorphisme de K^n sur E .

L'existence d'un tel isomorphisme fait de K^n l'exemple-type du K -espace vectoriel de dimension n sur K , sa base canonique étant la base la plus naturelle.

Théorème 5.27 Théorème de la dimension

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K , E étant de dimension finie.

Soit f une application linéaire de E dans F .

Alors $\text{Im}(f)$ est un s.e.v. de dimension finie de F et on a l'égalité : $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$.

Démonstration

On suppose $\dim E = n$ et $\dim \text{Ker} f = p$ où $n, p \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$.

Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une base de $\text{Ker} f$.

On complète cette famille par $n - p$ vecteurs $(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n)$ de façon à obtenir une base de E .

Cette famille $(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n)$ est libre et $\langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n \rangle \cap \text{Ker} f = \{0\}$.

On considère la famille $(f(u_{p+1}), f(u_{p+2}), \dots, f(u_n))$ et on veut montrer que celle-ci est une base de $\text{Im} f$.

- $\lambda_{p+1} f(u_{p+1}) + \lambda_{p+2} f(u_{p+2}) + \dots + \lambda_n f(u_n) = 0$
 $\Rightarrow f(\lambda_{p+1} u_{p+1} + \lambda_{p+2} u_{p+2} + \dots + \lambda_n u_n) = 0$
 $\Rightarrow \lambda_{p+1} u_{p+1} + \lambda_{p+2} u_{p+2} + \dots + \lambda_n u_n \in \text{Ker} f$
or $\lambda_{p+1} u_{p+1} + \lambda_{p+2} u_{p+2} + \dots + \lambda_n u_n \in \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n \rangle$
et $\langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n \rangle \cap \text{Ker} f = \{0\}$ donc
 $\Rightarrow \lambda_{p+1} u_{p+1} + \lambda_{p+2} u_{p+2} + \dots + \lambda_n u_n = 0$
 $\Rightarrow \lambda_{p+1} = 0, \lambda_{p+2} = 0, \dots, \lambda_n = 0$ car $(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n)$ est libre.

- Soit $y \in \text{Im} f$, c'est-à-dire $\exists x \in E / y = f(x)$
 $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_p u_p + x_{p+1} u_{p+1} + x_{p+2} u_{p+2} + \dots + x_n u_n$
 $f(x) = f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_p u_p + x_{p+1} u_{p+1} + x_{p+2} u_{p+2} + \dots + x_n u_n)$
 $f(x) = f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_p u_p) + f(x_{p+1} u_{p+1} + x_{p+2} u_{p+2} + \dots + x_n u_n)$
 $f(x) = f(x_{p+1} u_{p+1} + x_{p+2} u_{p+2} + \dots + x_n u_n)$
 $f(x) = x_{p+1} f(u_{p+1}) + x_{p+2} f(u_{p+2}) + \dots + x_n f(u_n)$
 On a bien $\text{Im} f = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n \rangle$
 D'où $\dim \text{Im} f = n - p$ et donc le résultat.

Remarques 5.28

- On appelle rang de f et on note $\text{rg} f$ la dimension de $\text{Im} f$.
 On a donc : $\dim E = \text{rg} f + \dim \text{Ker} f$.
 C'est pourquoi le résultat précédent est souvent appelé théorème du rang.
- On a $\text{rg} f \leq \dim E$ avec l'égalité si et seulement si f est injective.
- Si F est de dimension finie, on a $\text{rg} f \leq \dim F$ avec l'égalité si et seulement si f est surjective.
- Les notions de rang d'une application linéaire et de rang d'une famille de vecteurs se rejoignent.
 Pour toute base (e_1, e_2, \dots, e_p) de E , $\text{rg} f = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Propriété 5.29

Soient E et F deux K -espace vectoriels de même dimension finie.

Soit f une application linéaire de E dans F .

f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Démonstration

On a $\dim F = \dim E = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f$

f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0\}$
 $\Leftrightarrow \dim \text{Ker} f = 0$
 $\Leftrightarrow \dim F = \dim \text{Im} f$
 $\Leftrightarrow F = \text{Im} f$
 $\Leftrightarrow f$ est surjective.