Chapitre 5 : Limites

F. Wlazinski

23rd December 2003

Dans tout ce chapitre, f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition D_f est une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier.

1 Voisinage et adhérence

Définitions 1.1

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que :
E est un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}\ (A > 0)\ /\ ]A; +\infty[\subset E$.
E est un voisinage de $-\infty$ si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}\ (A < 0)\ /\ ]-\infty; A[\subset E$.
E est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\exists h > 0\ /\ ]x_0 - h; x_0 + h[\subset E$.
L'ensemble de tous les voisinages de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ est noté $\mathcal{V}(a)$.

Exemples 1.2

- $]-3; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. En effet $]1; +\infty[\subset]-3; +\infty[$.
- $[2; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. En effet $]3; +\infty[\subset [2; +\infty[$.
- $[1; 5]$ est un voisinage de 2 car $\left]2 - \dfrac{1}{2}; 2 + \dfrac{1}{2}\right[\subset [1; 5]$.
- $[1; 5]$ n'est pas un voisinage de 1.
- $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $[a - h; a + h]$ est un voisinage de a.
  En effet, $]a - \frac{h}{2}; a + \frac{h}{2}[\subset [a - h; a + h]$

Propriété 1.3

Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, la loi $\cap$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{V}(a)$, c'est-à-dire, si $V_1 \in \mathcal{V}(a)$ et si $V_2 \in \mathcal{V}(a)$ alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a)$.

Démonstration

On sépare les cas.
- Si $a = +\infty$.

$V_1 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists A_1 > 0\ /\ ]A_1; +\infty[\subset V_1$.
$V_2 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists A_2 > 0\ /\ ]A_2; +\infty[\subset V_2$.
Soit $A = \sup(A_1; A_2)$.
On a $]A_1; +\infty[\cap]A_2; +\infty[=]A; +\infty[\subset V_1 \cap V_2$.
- Si $a = -\infty$: similaire.
- Si $a \in \mathbb{R}$.

$V_1 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists h_1 > 0\ /\ ]a - h_1; a + h_1[\subset V_1$.
$V_2 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists h_2 > 0\ /\ ]a - h_2; a + h_2[\subset V_2$.
Soit $h = \inf(h_1; h_2)$.
On a $]a - h_1; a + h_1[\cap]a - h_2; a + h_2[=]a - h; a + h[\subset V_1 \cap V_2$. $\square$

Définition 1.4

Un élément $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ est adhérent à une partie E de $\mathbb{R}$ si et seulement si tout voisinage de a rencontre E, c'est-à-dire, si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap E \neq \emptyset$.

Propriété 1.5

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
On a : $+\infty$ est adhérent à E si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}$, $]A; +\infty[\cap E \neq \emptyset$.
On a : $-\infty$ est adhérent à E si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}$, $]-\infty; A[\cap E \neq \emptyset$.
On a : $x_0 \in \mathbb{R}$ (x_0 fini) est adhérent à E si et seulement si $\forall h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $]x_0 - h; x_0 + h[\cap E \neq \emptyset$.

Exemples 1.6

- $+\infty$ est adhérent à $]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

En effet, $\forall A \in \mathbb{R}$, $]A; +\infty[\cap \mathbb{R}_+^* =]A; +\infty[(\neq \emptyset)$ si $A > 0$ et $]A; +\infty[\cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^* (\neq \emptyset)$ si $A \leq 0$.

- $+\infty$ est adhérent à $E = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n - \frac{1}{4}; n + \frac{1}{4}\right]$.

En effet, $\forall A \in \mathbb{R}$, $\sup(0, E(A) + 1) \in]A; +\infty[$ et $\sup(0, E(A) + 1) \in \left[n - \frac{1}{4}; n + \frac{1}{4}\right]$ pour $n = E(A) + 1$.

- $+\infty$ n'est pas adhérent à $[0; 10^{100}]$.
- 1 est adhérent à $]0; 1[$.
- 1 est adhérent à $]0; 2[$.
- 0 est adhérent à $]-1; 0[\cup]0; 2[$.

Remarque 1.7

Si $x_0 \in D_f$ (fini), alors x_0 est adhérent à D_f car $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $]x_0 - h; x_0 + h[\cap D_f$ contient au moins x_0.

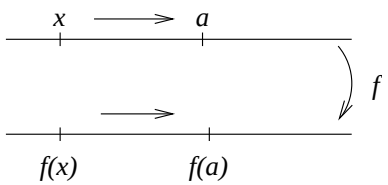
2 Généralités

Définition 2.1

Soient $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que a soit adhérent à D_f. On dit que f tend vers l quand x tend vers a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si : $\quad \forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists V_0 \in \mathcal{V}(a)$ / $f(V_0 \cap D_f) \subset V$.

Remarque 2.2

On veut exprimer mathématiquement le problème :



Mais pour avoir une définition correcte, il faut penser au problèmes suivants :

- Si $a = +\infty$, $f(a)$ n'existe pas.
- Idem pour $a = -\infty$.
- Même si $a \in \mathbb{R}$, $f(a)$ n'existe pas forcément.
- Problèmes de la droite et de la gauche : Penser à la fonction "partie entière" E.

Et encore bien d'autres.

D'où l'idée qui prime :
f admet une limite l quand x tend vers a : Cela signifie qu'aussi proche que l'on veut de l en terme d'ensemble, on peut trouver un ensemble proche de a dont les images de tous les éléments (dont cela est possible) sont dans le premier ensemble.

Remarque 2.3

Si a n'était pas adhérent à D_f, il existerait un voisinage V_0 de a tel que $V_0 \cap D_f = \emptyset$. La condition $f(V_0 \cap D_f) \subset V$ serait toujours vérifiée car $f(\emptyset) = \emptyset$. C'est pour cela que la définition de limite en a n'a de sens que si a est adhérent à D_f.

Remarques 2.4

- On peut poser aussi comme définition :
  f tend vers l quand x tend vers a
  $\Leftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists\, V_0 \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall x \in D_f,\ x \in V_0 \ \Rightarrow\ f(x) \in V.$
- a appartient à tout voisinage de lui-même. Ainsi dans la définition que nous avons pris, on ne peut avoir $\lim\limits_{x\,\to\,a} f(x) \neq f(a)$. Attention, on élargit le problème dans le cas des limites à droite et limites à gauche que nous allons voir dans la suite.

Exemple 2.5

On prend $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$ et $a = 2$.
Soit V voisinage quelconque de 7.
Donc il existe $h > 0$ tel que $]7 - h; 7 + h[\in V$.
On pose $V_0 = \left]2 - \dfrac{h}{3}, 2 + \dfrac{h}{3}\right[$.
On a bien $V_0 \in \mathcal{V}(2)$. De plus, $V_0 \in D_f$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in D_f \quad &, x \in V_0 \\
&\Rightarrow \quad 2 - \frac{h}{3} \leq x \leq 2 + \frac{h}{3} \\
&\Rightarrow \quad 6 - h \leq 3x \leq 6 + h \\
&\Rightarrow \quad 7 - h \leq 3x + 1 \leq 7 + h \\
&\Rightarrow \quad f(x) \in V
\end{aligned}$$

Remarque 2.6

L'existence d'une limite est la condition nécessaire dans les propriétés qui vont suivre. C'est toujours un point à vérifier. Ce n'est pas le cas, par exemple, pour sin ou cos en $+\infty$.

Propriété 2.7

Si une limite existe alors elle est unique.

Démonstration

C'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l'$, alors $l = l'$.
Nous laissons le soin au lecteur de vérifier qu'une fonction ne peut avoir en même temps pour limite deux des choix : $+\infty$, $-\infty$ ou un réel.
Nous nous interessons donc au cas où l et l' sont des réels.
Preuve par l'absurde : supposons $l \neq l'$, par exemple $l < l'$.
Considérons les deux intervalles suivants :
$V_1 = \left]l - \dfrac{l' - l}{3}; l + \dfrac{l' - l}{3}\right[$ et $V_2 = \left]l' - \dfrac{l' - l}{3}; l' + \dfrac{l' - l}{3}\right[$.
On a $V_1 \in \mathcal{V}(l)$, $V_2 \in \mathcal{V}(l')$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \exists V_0 \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall x \in D_f,\ x \in V_o \ \Rightarrow\ f(x) \in V_1.$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \exists V_0' \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall x \in D_f,\ x \in V_o' \ \Rightarrow\ f(x) \in V_2.$
Mais $V_0 \cap V_0' \in \mathcal{V}(a)$, $V_0 \cap V_0' \subset V_0$ et $V_0 \cap V_0' \subset V_0'$.
Donc pour tout $x \in V_0 \cap V_0'$ tel que $x \in D_f$, on devrait avoir $f(x) \in V_1$ et $f(x) \in V_2$: absurde. $\square$

3 Définitions équivalentes

Définition 3.1

Si a et l sont finis. On a :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$

Remarque 3.2

En effet, $|f(x)-l| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \ \Leftrightarrow\ f(x) \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[\ \Leftrightarrow\ \exists\, V \in \mathcal{V}(l)\ /\ f(x) \in V$
et $|x-a| < \eta \ \Leftrightarrow\ a-\eta < x < a+\eta \ \Leftrightarrow\ x \in]a-\eta; a+\eta[\ \Leftrightarrow\ \exists V_0 \in \mathcal{V}(a)\ /\ x \in V_0.$

Exemple 3.3

On veut montrer que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.
On a $D_f = \mathbb{R}$. Il faut donc montrer $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0\ /\ |x-2| < \eta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$.
Puisque $|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |(x-2)(x-2+4)| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \leq |x-2|^2 + 4|x-2|$,
On a $|x-2| < \eta \Rightarrow 0 \leq |x-2|^2 < (\eta)^2$
Et $|x-2| < \eta \Rightarrow 0 \leq 4|x-2| < 4\eta$.
Donc $|x-2| < \eta \Rightarrow 0 \leq |x-2|^2 + 4|x-2| < (\eta)^2 + 4\eta$.
Le problème est de choisir η tel que pour ε donné, on obtient bien $|x^2-4| < \varepsilon$.
On peut remarquer que si $\eta < 1$ alors $(\eta)^2 < \eta$ et donc $(\eta)^2 + 4\eta < 5\eta$
Donc si on prend $\eta = \inf\left(\frac{\varepsilon}{5}; 1\right)$, on a bien toujours $(\eta)^2 + 4\eta \leq \varepsilon$.
Et surtout $|x-2| < \eta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$

Remarque 3.4

On peut remplacer $|f(x)-l| < \varepsilon$ par $|f(x)-l| \leq \varepsilon$ ou $|x-a| < \eta$ par $|x-a| \leq \eta$ sans changer le sens de la définition.
Il en est de même pour les autres définitions (ou propriétés) où l'on pourra remplacer une ou plusieurs inégalités strictes par des inégalités larges.

Propriété 3.5

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
On a : $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Démonstration

On a $D_f = \mathbb{R}$.
On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ mais x_0 quelconque. On doit montrer que :
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.
On a $|f(x)-f(x_0)| = |ax+b-(ax_0+b)| = |a(x-x_0)| = |a||x-x_0|$.
Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$.
On a bien que, si $|x-x_0| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, alors $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. $\square$

Propriété 3.6

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a \in D_f$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarques 3.7

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas toujours et n'est pas toujours finie.
- $a \in D_f$ est une condition plus forte que a adhérent à D_f.

Démonstration

On suppose $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
On a donc $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
Mais $a \in D_f$ avec $\forall\eta > 0,\ |a-a| < \eta$ donc $\forall\varepsilon > 0,\ |f(a) - l| < \varepsilon$.
Or ceci implique $|f(a) - l| = 0$ (démonstration par l'absurde si nécessaire) c'est-à-dire $f(a) = l$. $\square$

Définition 3.8

Si a est fini, on a :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0,\ \exists\,\eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A < 0,\ \exists\,\eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < A.$

Exemple 3.9

On veut montrer par la définition que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
$\dfrac{1}{x^2}$ est défini sur $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*$ et 0 est bien adhérent à $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
Si $A > 0$, $\dfrac{1}{x^2} > A \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \dfrac{1}{A} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.
Donc $\forall A > 0$ on pose $\eta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.
On a bien $\forall A > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - 0| < \eta \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} > A$.

Remarque 3.10

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} -f(x) = +\infty$.

Définitions 3.11

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\,B > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A > 0,\ \exists\,B > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ x > B \Rightarrow f(x) > A.$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A < 0,\ \exists\,B > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ x > B \Rightarrow f(x) < A.$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\,B < 0\ /\ \forall x \in D_f,\ x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A > 0,\ \exists\,B < 0\ /\ \forall x \in D_f,\ x < B \Rightarrow f(x) > A.$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A < 0,\ \exists\,B < 0\ /\ \forall x \in D_f,\ x < B \Rightarrow f(x) < A.$

Exemple 3.12

On veut montrer par la définition que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
$g(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $+\infty$ est bien adhérent à $\mathbb{R}$.
Si $A > 0$, $x^2 > A \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \sqrt{A} \quad \Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{A}$ ou $x > \sqrt{A}$.
Donc $\forall A > 0$ on pose $B = \sqrt{A}$. On a bien $\forall A > 0,\ \forall x \in D_f,\ x > B \Rightarrow x^2 > A$.

Propriété 3.13

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\,\to\,+\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si u est la suite définie par $u_n = f(n)$ alors $\lim\limits_{n\,\to\,+\infty} u_n = l$.

Remarque 3.14

Attention, la réciproque est fausse. Par exemple : $u_n = \cos 2n\pi$.

4 Limite à droite et limite à gauche

Définition 4.1

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que a soit adhérent à D_f et tel que $\forall h > 0$, $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $]a-h;a[\cap V \neq \emptyset$. On dit que l est la limite à gauche de f en a et on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to a; x<a} f(x) = l$ ssi :
Si l est fini : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ a-\eta < x < a \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$.
Si $l = +\infty$: $\forall A > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ a-\eta < x < a \ \Rightarrow\ f(x) > A$.
Si $l = -\infty$: $\forall A < 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ a-\eta < x < a \ \Rightarrow\ f(x) < A$.

Remarques 4.2

- On remplace $|x-a| < \eta$ c'est-à-dire $a-\eta < x < a+\eta$ par $a-\eta < x < a$
- On peut avoir $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$ puisque a n'est pas dans l'ensemble considéré.

Définition 4.3

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que D_f contient un intervalle du type $]a;a+h[$ avec $h > 0$. On dit que l est la limite à droite de f en a et on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to a; x>a} f(x) = l$ ssi :
Si l est fini : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ a < x < a+\eta \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$.
Si $l = +\infty$: $\forall A > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ a < x < a+\eta \ \Rightarrow\ f(x) > A$.
Si $l = -\infty$: $\forall A < 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ a < x < a+\eta \ \Rightarrow\ f(x) < A$.

Propriété 4.4

Soit $a \in D_f$.
Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe et si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe, on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l = f(a)$.

Propriété 4.5

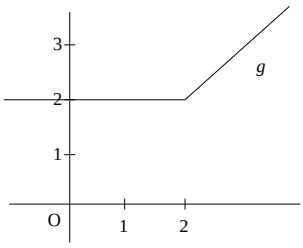
Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f et tel que $a \notin D_f$.
Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe et si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe, on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Remarque 4.6

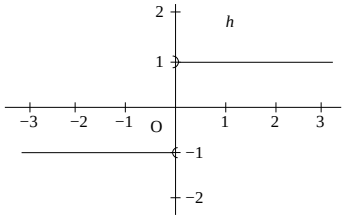
Si $D_f =]a, +\infty[$ et si la limite existe, on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.
Si $D_f =]-\infty, a[$ et si la limite existe, on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$.

Exemples 4.7

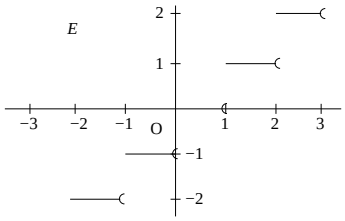
1. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sup(x, 2)$.
   On a $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x = 2$. De plus, $g(2) = 2$ et donc $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2$.



2. Soit h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$. On remarque que $0 \notin D_h$ mais 0 est adhérent à D_f.
   On a $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$.



3. Soit E la fonction partie entière.
   On a $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} E(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} E(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} E(x) = 1$ mais aussi $\lim\limits_{x\to 1^-} E(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} E(x) = 1$.



5 Limites et opérations

Propriété 5.1

Soient f et g deux fonctions telles que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D_f et D_g.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$l' \in \mathbb{R}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Remarques 5.2

- Dans le cas où $a \in \mathbb{R}$, la propriété ci-dessus et celles qui suivent restent vraies si on remplace a par a^- ou a^+.
- On a donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ dans un seul cas!!!!

Démonstration

La démonstration de tous les cas est longue et fastidieuse. Toutefois voici la démonstration du cas $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$.
On a : $\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists \eta_1 > 0 \ / \ \forall x \in D_f,\ |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon_1$
et $\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists \eta_2 > 0 \ / \ \forall x \in D_g,\ |x-a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x)-l'| < \varepsilon_2$.
On a $|f(x)+g(x)-(l+l')| = |f(x)-l+g(x)-l'| \leq |f(x)-l| + |f(x)-l'|$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$.
On a bien $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in D_f \cap D_g,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(l+l')| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$. $\square$

Propriété 5.3

Soient f et g deux fonctions telles que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D_f et D_g.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	0
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Remarque 5.4

Les autres cas se déduisent des précédents grâce à la règle des signes classique.

Remarque 5.5

On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b^+$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $f(x) > b$ sur un voisinage de a.
On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b^-$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $f(x) < b$ sur un voisinage de a.
En particulier :
On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ sur un voisinage de a.
On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^-$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ sur un voisinage de a.

Propriété 5.6

Soient f et g deux fonctions telles que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D_f et D_g.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	0^+	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	∞	$+\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0^+	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.	F. I.

Propriété 5.7

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l| \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.8

La réciproque est fausse. Par exemple, $f(x) = (-1)^{E(x)}$.

Démonstration

Rappel : $|\,|a| - |b|\,| \leq |a - b|$.
On a donc : $|\,|f(x)| - |l|\,| \leq |f(x) - l|$. $\square$

Propriété 5.9

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à D_f.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Démonstration

Dans le cas où $a \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |\,|f(x)|\,| < \varepsilon$
Mais $|\,|f(x)|\,| = |f(x)|$. $\square$

Corollaire 5.10

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à D_f.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) - l = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x) - l| = 0$.

Propriété 5.11

On suppose a est adhérent à D_f et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_0 (\in \overline{\mathbb{R}})$.
Si l_0 est adhérent à D_g et si $\lim\limits_{x\to l_0} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = l$.

Exemple 5.12

Si on sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.
On peut en déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

6 Limites et inégalités

Propriété 6.1

Soit a un point adhérent à D_f. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{V}(a)$ tels que $\forall x \in V \cap D_f,\ f(x) \leq M$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors on a $l \leq M$.

Démonstration

Dans le cas où $a \in \mathbb{R}$.
Par l'absurde, on suppose $l > M$. On pose $\varepsilon = \dfrac{l - M}{3}$.
Pour cet ε, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
Or $|f(x) - l| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
Mais $l - \varepsilon = \dfrac{2l + M}{3} > M$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap]a - \eta, a + \eta[\neq \emptyset$.
Donc il existerait $x \in V$ tel que $f(x) > M$. $\square$

Remarques 6.2

- Attention, même si l'on avait $f(x) < M$ dans la prpriété 6.1, cela n'impliquerait pas $l < M$ mais aussi $l \leq M$. Par exemple : $f(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$. On a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$. Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- Si $\exists M \in \mathbb{R}$ et $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ tels que $\forall x \in V \cap D_f,\ f(x) \geq M$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors on a $l \geq M$.

Propriété 6.3

Soit a un point adhérent à D_f et D_g et $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V \cap D_f \cap D_g,\ f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l\ (\in \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'\ (\in \mathbb{R})$ alors $l \leq l'$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Démonstration

- $f(x) \leq g(x) \ \Leftrightarrow\ f(x) - g(x) \leq 0$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ l \leq l'$.
- On ne traite que le cas $a \in \mathbb{R}$.

La démonstration donne l'idée de ce qu'il faudrait faire dans un cadre général.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$.
Puisque $g(x) \geq f(x) > A$, on obtient directement le résultat. $\square$

Remarque 6.4

Attention $f(x) < g(x)$ n'implique pas $l < l'$ mais $l \leq l'$.
Par exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.
On a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$.
Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Corollaire 6.5

Théorème des gendarmes.
Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit a un point adhérent à D_f, D_g et D_h. On suppose qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in V \cap D_f \cap D_g \cap D_h,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Démonstration

On ne traite que le cas $a \in \mathbb{R}$. La démonstration donne l'idée de ce qu'il faudrait faire dans un cadre géneral.
On a $f(x) - l \leq g(x) - l \leq h(x) - l$.
Si $g(x) - l \geq 0$, $|g(x) - l| \leq |h(x) - l|$ et si $g(x) - l < 0$, $|g(x) - l| \leq |f(x) - l|$.
Donc $|g(x) - l| \leq \sup(|f(x) - l|, |h(x) - l|)$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_1 > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x - a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
$\lim\limits_{x \to a} h(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_2 > 0\ /\ \forall x \in D_f,\ |x - a| < \eta_2 \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$
Pour tout ε, on pose $\eta = \inf(\eta_1; \eta_2)$. On a bien :
$\forall \varepsilon > 0,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$. $\square$

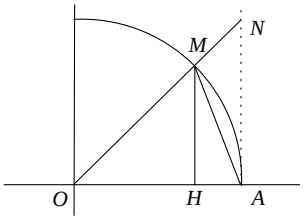
Corollaire 6.6

Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit a un point adhérent à D_f et D_u.
Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset D_f \cap D_u$ et $\forall x \in V,\ |f(x) - l| \leq |u(x)|$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Démonstration

Théorème des gendarmes avec $0 \leq |f(x) - l| \leq |u(x)|$. $\square$

Rappel



Pour tout x tel que $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, on a :
$x = \overset{\frown}{AM}$ et $\sin x = \overline{HM}$
Or $\overset{\frown}{AM} \geq \overline{AM}$ et $AM \geq HM$ d'où $\sin x \leq x$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|$.

On a aussi $\tan x = \overline{AN}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} \mod \pi\right\}$, $|x| \leq |\tan x|$.

Exemples 6.7

- On veut montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x \to 0} |\sin x| = 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

- On veut montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

$|\cos x - 1| = |1 - \cos x| = \left|2 \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$.
Or $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} 2 \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} |\cos x - 1| = 0$. D'où le résultat.

- On veut montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

$\forall 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$, on a : $(\sin x \leq)\, x \leq \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Donc $x \cos x \leq \sin x \leq x$ et $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.

7 Equivalences

Dans cette partie , $a (\in \overline{\mathbb{R}})$ est un élément adhérent à une partie I de $\mathbb{R}$. En pratique, I sera un intervalle, une réunion d'intervalles ou $\mathbb{R}$ tout entier. f et g sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

Définition 7.1

- On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a (ou en a) si et seulement si :

$\exists M > 0$ et $\exists V \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall x \in V \cap I,\ |f(x)| \leq M|g(x)|$.
On note alors $f = O_a(g)$.

• On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a (ou en a) si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall x \in V \cap I,\ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$.
On note alors $f = o_a(g)$.
• On dit que f est *équivalente* à g en a si et seulement si $f - g = o_a(g)$.
On note alors $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple 7.2

$\sin^2 x = O_0(\sin x)$ car sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $|\sin^2(x)| \leq |\sin x|$.

Propriété 7.3

Si on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), on a les définitions équivalentes suivantes :

• $f = O_a(g) \ \Leftrightarrow\ \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

• $f = o_a(g) \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in I,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

• $f \underset{a}{\sim} g \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in I,\ f(x) = g(x)u(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 1$.

Exemples 7.4

• $x^2 \sin x = o_0(x^2)$.
• $\ln x = o_{+\infty}(x)$.
• $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

En effet $\sqrt{1+x} - 1 = \dfrac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} = 2$.

Remarques 7.5

• $f \underset{a}{\sim} g$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$. c'est-à-dire :
Réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$
Symétrique : Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$,
Transitive : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.
La symétrie permet donc dire : *f et g sont équivalentes au voisinage de a.*
• Dans les notations $f = o(g)$, $f = O(g)$ et $f \sim g$, le point a n'apparaît pas en général.
Le contexte doit donc être clair.
• $f = o(x^n) \ \Leftrightarrow\ f(x) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Dans les résultats suivants, les relations de comparaison sont établies au voisinage de a.

Remarques 7.6

$f = O(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.
$f = o(1)$ si et seulement si la limite de f au point a est 0.

Propriétés 7.7

Si $f = o(g)$, alors $f = O(g)$.
Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = O(h)$.
Si $f = o(g)$ et $g = O(h)$, ou si $f = O(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.

Propriétés 7.8

Si $f = O(h)$ et $g = O(h)$, alors $f + g = O(h)$, et pour tout réel α, $\alpha f = O(h)$.
Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$, alors $f + g = o(h)$, et pour tout réel α, $\alpha f = o(h)$.

Propriétés 7.9

Si $f = O(h)$ et $g = O(k)$, alors $fg = O(hk)$.
Si $f = o(h)$ et $g = o(k)$, alors $fg = o(hk)$.
Si $f = o(h)$, alors pour tout $\alpha > 0$, $f^\alpha = o(h^\alpha)$ (en supposant $f, h > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$).

Propriétés 7.10

Si $f \sim g$ et $g = O(k)$, alors $f = O(k)$.
Si $f \sim g$ et $g = o(k)$, alors $f = o(k)$.

Propriété 7.11

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g gardent le même signe au voisinage de a.

Propriété 7.12

- Si $f \underset{a}{\sim} g$, et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l (\in \overline{\mathbb{R}})$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, avec l réel non nul, alors $f \underset{a}{\sim} g$.

Démonstration

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \times g(x)$.

Puisque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, d'après les règles sur le produit de limites, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

- D'après les règles sur le produit de limites, on a bien $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. $\square$

Remarque 7.13

Attention, la réciproque est fausse si $l = \pm\infty$ ou si $l = 0$. Par exemple, $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ ou x et x^2.

Propriété 7.14

Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors $f_1 \times g_1 \sim f_2 \times g_2$.

Démonstration

En effet, $\dfrac{(f_1 \times g_1)(x)}{(f_2 \times g_2)(x)} = \dfrac{f_1(x) \times g_1(x)}{f_2(x) \times g_2(x)} = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$. $\square$

Remarque 7.15

Attention !! Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors on n'a pas, en général, $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.
Par exemple : $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $-x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^2 + 1$ et pourtant x et 1 ne sont pas équivalents en $+\infty$.
Cependant : si $f \sim h$ et $g = o(f)$, alors $f + g \sim h$.
Plus simplement : $g = o(f) \Rightarrow f + g \sim f$.
Généralisation : si $f_2, f_3, \ldots, f_n$ sont des $o(f_1)$ alors $f_1 + f_2 + \cdots + f_n \sim f_1$.

Propriété 7.16

On suppose que g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf peut-être en a).
Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors $\dfrac{f_1}{g_1} \sim \dfrac{f_2}{g_2}$.

Démonstration

En effet, $\dfrac{\left(\dfrac{f_1}{g_1}\right)(x)}{\left(\dfrac{f_2}{g_2}\right)(x)} = \dfrac{\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}}{\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}} = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$. $\square$

Exemple 7.17

$\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$ d'où $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} = \dfrac{1}{2}$

Remarques 7.18

- En particulier, si $f \sim g$ alors $\dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{g}$.
- Les deux propriétés précédentes peuvent être généralisées à des produits ou des quotients de fonctions en nombre quelconque.

Dans un tel produit (ou quotient), on peut remplacer tout ou partie des fonctions par un *équivalent* : l'expression obtenue est équivalente à l'expression initiale (en particulier, la limite éventuelle en a est la même).

Corollaire 7.19

Si $f \sim g$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{Z},\ f^\alpha \sim g^\alpha$.

Exemple 7.20

On a $\sin x \underset{0}{\sim} x$, donc $(\sin x)^2 \underset{0}{\sim} x^2$.

Remarque 7.21

On pourra étendre cette propriété à $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Dans ce cas, il faudra que f et g soient > 0. Par exemple, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Propriété 7.22

Soit φ une application de J dans I, qui tend vers a quand x tend vers b dans J.
Si $f = O_a(g)$, alors $f \circ \varphi = O_b(g \circ \varphi)$.
Si $f = o_a(g)$, alors $f \circ \varphi = o_b(g \circ \varphi)$.
Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.

Remarque 7.23

C'est surtout cette dernière propriété qui est utilisée. Par exemple :
Sachant que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on trouve que $\sin \dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ en $\pm\infty$.
Sachant que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on trouve que $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$.

Remarques 7.24

- Les équivalents servent essentiellement au calcul de limites :

On transforme une expression $f(x)$, dont on cherche la limite l en un point a, en une expression équivalente $g(x)$ dont la limite en ce point est évidente (si la limite l est réelle, il est courant qu'on aboutisse à $g(x) = l$).
Les outils essentiels sont les équivalents classiques (voir plus loin) et la possibilité qu'on a de remplacer les facteurs d'un produit (d'un quotient) par des équivalents.

- L'erreur la plus fréquente consiste à utiliser les équivalents dans des sommes. On rappelle que la seule propriété concernant les équivalents et les sommes peut s'écrire : $g = o(f) \Rightarrow f + g \sim f$.
- On évitera d'utiliser un équivalent d'une fonction f sous la forme $f \sim g + h$, avec $h = o(g)$, et surtout de donner un rôle à h : on se contentera de $f \sim g$.

Ecrire par exemple $\cos(x) \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$ (en 0) n'est pas faux mais est dangereux si on utilise $-\dfrac{x^2}{2}$. En effet, on a aussi : $\cos(x) \sim 1 + x^2 \sim 1 - 36x^2 \ldots$

Pour cet exemple, la solution est sans doute d'écrire : $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

- Soit l un réel non nul, et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors $f(x) \sim l$ en ce point.

Mais si $l = 0$, on n'écrira pas $f(x) \sim 0$!
En effet, seule la fonction nulle au voisinage de a est elle-même équivalente à 0 en a.

• Si $f \sim g$ (f et g étant positives et ne tendent pas vers 1) alors $\ln(f) \sim \ln(g)$.
C'est faux si f et g tendent vers 1.
Par exemple, $(1+x) \sim (1+x^2)$ en $x=0$, mais en ce point $\ln(1+x) \sim x$ et $\ln(1+x^2) \sim x^2$.
• On évitera surtout de prendre des " exponentielles " d'équivalents :
En effet $e^f \sim e^g \Leftrightarrow f - g \to 0$, ce qui n'équivaut pas du tout à $f \sim g$.
Exemples : x et x^2 en 0, ou encore x et $x+1$ en $+\infty$.

Propriété 7.25

Soient α, β et γ des réels strictement positifs. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^\beta e^{-\alpha x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\beta} \ln^\gamma(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0+} x^\beta |\ln^\gamma(x)| = 0$$

Autrement dit :

Au voisinage de $+\infty$, $x^\beta = o(e^{\alpha x})$.
Au voisinage de $-\infty$, $e^{\alpha x} = o(|x|^{-\beta})$.
Au voisinage de $+\infty$, $\ln(x)^\gamma = o(x^\beta)$.
Au voisinage de 0, $|\ln(x)|^\gamma = o(x^{-\beta})$.

Propriété 7.26

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$.
Soit $P(x) = a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ un polynôme ($a_n \neq 0$, $a_m \neq 0$).
Au voisinage de l'origine, $P(x) \sim a_m x^m$ (monôme de plus bas degré).
Au voisinage de $\pm\infty$, $P(x) \sim a_n x^n$ (monôme de plus haut degré).
Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle (P et Q deux polynômes).
Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus bas degré.
Au voisinage de ∞, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus haut degré.

Exemple 7.27

Soit $f(x) = 5x^3 - x^2 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{5x^3 - x^2 - 2x}{x^4 + x} = \dfrac{f(x)}{x^4 + x}$.
On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 5x^3$. En effet, $f(x) = 5x^3(1 - \dfrac{1}{5x} - \dfrac{2}{5x^2})$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{5x} - \dfrac{2}{5x^2} = 1$.
On a $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{5x^3}{x^4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{5}{x}$.
On a $f(x) \underset{0}{\sim} -2x$. En effet, $f(x) = 2x(-\dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 1)$ et $\lim\limits_{x \to 0} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}x^2 = 1$.
On a $g(x) \underset{0}{\sim} -2$.