Matrices et
systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, n, p et q sont trois entiers naturels non nuls et K est un corps commutatif.
En pratique, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Matrices

Définition 1.1

La donnée de np éléments de K rangés dans un tableau à n lignes et p colonnes est appelée une matrice $n \times p$ à coefficients dans K

Exemples 1.2

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -\frac{1}{3} & 7 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $B = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×1 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Notations 1.3

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
- L'ensemble des matrices $n\times p$ à coefficients dans K se note $\mathscr{M}_{np}(K)$.

Définition 1.4

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n'\ j=1,p'}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n'p'}(K)$ où n', $p' \in \mathbb{N}^*$.
On dit que $A = B$ si et seulement si $\begin{cases} n = n' \\ p = p' \\ a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, n\ \forall j = 1, p \end{cases}$.

Définitions 1.5

On dit que $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} \in \mathscr{M}_{np}(K)$ est :

- une matrice ligne si et seulement si $n = 1$. Exemple : $A = (1\ \ 2\ \ 3)$.
- une matrice colonne si et seulement si $p = 1$. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- une matrice carrée si et seulement si $n = p$. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- une matrice diagonale si et seulement si A est une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
  Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- une matrice scalaire si et seulement si A est une matrice diagonale telle que $a_{ii} = a_{jj}$.
  Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$.
- une matrice unité si et seulement si A est une matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1$.
  Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.
- une matrice triangulaire supérieure ssi A est une matrice carrée telle que $a_{ij}=0$ si $i > j$.
  Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
- une matrice triangulaire inférieure ssi A est une matrice carrée telle que $a_{ij}=0$ si $i < j$.
  Exemple : $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques 1.6

- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n (c'est-à-dire des matrices $n \times n$) à coefficients dans K est noté $\mathscr{M}_n(K)$.
- On identifie les éléments suivants :
  Les matrices colonnes et les vecteurs colonnes c'est-à-dire $\mathscr{M}_{n1}(K)$ et K^n.
  Les matrices lignes et les vecteurs lignes c'est-à-dire $\mathscr{M}_{1p}(K)$ et K^p.
  Les matrices carrées d'ordre 1 et les éléments de K c'est-à-dire $\mathscr{M}_1(K)$ et K.

Définition 1.7

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On appelle vecteur colonne de A, toute colonne extraite de A identifiée à un vecteur de K^n.
On appelle vecteur ligne de A, toute ligne extraite de A identifiée à un vecteur de K^p.

Exemple 1.8

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur colonne de A.

$v = (1; 2; -3) \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur ligne de A.

Définition 1.9

On appelle rang d'une matrice le rang de la famille composée de ses vecteurs colonnes.

Remarque 1.10

Le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille composée de ses vecteurs lignes.

Définition 1.11

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On définit la loi + sur $\mathscr{M}_{np}(K)$ par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$

Exemple 1.12

Dans $\mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ et si $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, alors on a $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$.

Remarques 1.13

- On a donc : $(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} + (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
- On appelle matrice nulle de $\mathscr{M}_{np}(K)$ la matrice $n \times p$ composée uniquement de 0. Elle est notée 0.

Propriété 1.14

$(\mathscr{M}_{np}(K),+)$ est un groupe abélien c'est-à-dire, $\forall A,B$ et $C \in \mathscr{M}_{np}(K)$,

1. $A + B \in \mathscr{M}_{np}(K)$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $A + 0 = 0 + A = A$.
4. $\exists \tilde{A} \in \mathscr{M}_{np}(K)$ / $A + \tilde{A} = \tilde{A} + A = 0$.
5. $A + B = B + A$.

Démonstration

On pose $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$, $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $C = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$

1. loi de composition interne : par définition.
2. associativité : $A + (B + C) = A + (b_{ij} + c_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
   (symétrique en a,b et c : permutation et commutativité)
3. élément neutre : $A + 0 = (a_{ij} + 0)_{i=1,n\ j=1,p} = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = A$
4. symétrique : on pose $\tilde{A} = (-a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
   $A + \tilde{A} = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{i=1,n\ j=1,p} = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = 0$.
5. commutativité : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = (b_{ij} + a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = B + A$

Remarques 1.15

- On note $-A$ la matrice $\tilde{A}$ du 4°). Si $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$, on a $-A = (-a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$.
- On peut définir $A - B$ par $A + (-B)$.

Définition 1.16

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et soit $\lambda \in K$.
On définit la loi externe . sur $\mathscr{M}_{np}(K)$ à domaine d'opérateur K par $\lambda.A = (\lambda \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$.

Exemple 1.17

Dans $\mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et si $\lambda = -2$, alors on a $\lambda.A = -2.A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarques 1.18

- On a donc $\lambda.(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = (\lambda \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$.
- La loi . n'est généralement pas notée.
- $(-1)\ .\ A = -A$.

Propriété 1.19

$(\mathscr{M}_{np}(K),+,.)$ est un K-e.v.

Démonstration

Il reste 5 points à vérifier.

$\forall A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p},\ B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} \in \mathscr{M}_{np}(K),\ \forall \lambda,\mu \in K,$

- Loi externe par définition.
- $(\lambda + \mu).A = (\lambda + \mu).(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= ((\lambda + \mu) \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (\lambda \times a_{ij} + \mu \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (\lambda \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} + (\mu \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= \lambda.(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} + \mu.(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= \lambda.A + \mu.A.$
- $\lambda.(\mu.A) = \lambda.(\mu.(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p})$
  $= \lambda.(\mu \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (\lambda \times (\mu \times a_{ij}))_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= ((\lambda \times \mu) \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (\lambda \times \mu).(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (\lambda \times \mu).A.$
- $\lambda.(A + B) = \lambda.((a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} + (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p})$
  $=\lambda.((a_{ij} + b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p})$
  $= (\lambda \times (a_{ij} + b_{ij}))_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (\lambda \times a_{ij} + \lambda \times b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (\lambda \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} + (\lambda \times b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= \lambda.(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} + \lambda.(b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= \lambda.A + \lambda.B.$
- $1.A = 1.(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (1 \times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  $= A.$

Remarque 1.20

La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathscr{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Propriété 1.21

$\dim_K \mathscr{M}_{p\times q}(K) = p \times q$.

Définition 1.22

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et soit $B = (b_{ij})_{i=1,p\ j=1,q}$ une matrice de $\mathscr{M}_{pq}(K)$.
On appelle produit de A par B et on note $A \times B$ la matrice de $\mathscr{M}_{nq}(K)$ définie par

$$A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,q} \qquad \text{où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple 1.23

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A est une matrice 2×3 et B est une matrice 3×4 donc $A\times B$ est une matrice 2×4.

Le calcul donne $A\times B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 11 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarques 1.24

- Pour pouvoir multiplier la matrice A par la matrice B, il faut que le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.
- On ne peut pas multiplier B par A dans l'exemple ci-dessus.
- Si $A \in \mathscr{M}_{np}(K)$, on peut calculer à la fois $A\times B$ et $B\times A$ que si $B \in \mathscr{M}_{pn}(K)$.
  Dans ce cas, $A\times B \in \mathscr{M}_n(K)$ et $B\times A \in \mathscr{M}_p(K)$.
- La loi $\times$ est une loi de composition interne que si l'on considère un ensemble de matrices carrées.

Propriété 1.25

Soient $\lambda \in K$, A une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et B une matrice de $\mathscr{M}_{pq}(K)$.
On a : $\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$.

Démonstration

$A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,p\ j=1,q}$.

On pose $A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,q}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

On a donc $\lambda.(A \times B) = (k_{ij})_{i=1,n\ j=1,q}$ avec, $\forall i = 1,n\ \forall j = 1,q,\ k_{ij} = \lambda.c_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{ik}) b_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\lambda b_{kj}).$$

Propriété 1.26

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + c'est-à-dire :

$\forall A,B$ et $C \in \mathscr{M}_n(K)$, $\quad A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

$$(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A).$$

Démonstration

On pose $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ et $C = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.
On a $B + C = (b_{ij} + c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$
$A \times (B + C) = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$
$A \times B = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$ $A \times C = (\chi_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\chi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. D'où le résultat.

Propriété 1.27

$(\mathscr{M}_n(K),\times)$ est un monoïde c'est-à-dire
1. $\forall A,B \in \mathscr{M}_n(K),\ A \times B \in \mathscr{M}_n(K)$.
2. $\forall A,B$ et $C \in \mathscr{M}_n(K),\ A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
3. $\exists I \in \mathscr{M}_n(K)$ / $\forall A \in \mathscr{M}_n(K),\ A \times I = I \times A = A$.

Démonstration

On pose $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ et $C = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.
1. $\times$ loi de comp interne par définition
2. $\times$ associatif
On a $B \times C = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}$
$A \times (B \times C) = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\gamma_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$
On a $A \times B = (\chi_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\chi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$
$(A \times B) \times C = (\phi_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\phi_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \phi_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$
3. Elément neutre $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & . & \vdots \\ \vdots & . & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a $I_n = (e_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ avec $e_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $e_{ij} = 1$ si $i = j$.
$A \times I_n = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj} = a_{ij}\ e_{jj} = a_{ij}$.
$I_n \times A = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}a_{kj} = e_{jj}\ a_{ij} = a_{ij}$.

Remarques 1.28

- $(\mathscr{M}_n(K),+,\times)$ est un anneau unifère.
- Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.
Contre exemple : soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Toutefois, il arrive que deux matrices commutent.
Il est intéressant de voir ce que donne la multiplication à droite ou à gauche par B.
- Les puissances entières positives d'une matrice carrée A sont définies par
$A^0 = I,\ A^1 = A$ et $A^n = A \times A \times .... \times A$ pour tout entier $n \geq 2$.

Définition 1.29

On appelle diagonale d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ de $\mathscr{M}_n(K)$ l'ensemble des coefficients de la forme a_{ii} où $i = 1,n$.

Définition 1.30

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathscr{M}_{pn}(K)$ définie par
${}^tA = (\alpha_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$.

Exemples 1.31

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ ${}^tB = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Remarques 1.32

- Lorsque l'on transpose une matrice, les vecteurs colonnes de celle-ci sont changés en vecteurs lignes et inversement.
- Lorsque l'on transpose une matrice carrée, les éléments diagonaux (ceux qui appartiennent à la diagonale) sont inchangés.

Propriété 1.33

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et soit $\lambda \in K$.
Alors on a :
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$

Démonstration

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$.
On pose ${}^tA = (\alpha_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$ et ${}^tB = (\beta_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\beta_{ij} = b_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$.
- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  ${}^t(A + B) = (\gamma_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = a_{ji} + b_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$
  ${}^tA + {}^tB = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$
  Or $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = \gamma_{ij}\qquad \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$
- $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  ${}^t(\lambda A) = (\gamma_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \lambda a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$
  $\lambda({}^tA) = (\lambda\alpha_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ où $\lambda\alpha_{ij} = \lambda a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$

Remarque 1.34

L'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathscr{M}_{np}(K) \to \mathscr{M}_{pn}(K) \\ A \mapsto {}^tA \end{array}$ est un isomorphisme involutif d'espaces vectoriels.

Propriété 1.35

Soient A une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et B une matrice de $\mathscr{M}_{pq}(K)$.
On a ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Remarque 1.36

Puisque ${}^tB$ est une matrice de $\mathscr{M}_{qp}(K)$ et ${}^tA$ est une matrice de $\mathscr{M}_{pn}(K)$, ${}^tB \times {}^tA$ est une matrice de $\mathscr{M}_{qn}(K)$.

Démonstration

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,p\ j=1,m}$. On pose $A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.
${}^t(A \times B) = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = c_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$.
${}^tB \times {}^tA = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \gamma_{ij}$.

Définition 1.37

Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(K)$.
On dit que A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.
On dit que A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

Exemples 1.38

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

Remarque 1.39

La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

II. Trace d'une matrice

Définition 2.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K (i.e. $A \in \mathscr{M}_n(K)$).
On appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A.
C'est-à-dire si $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, on a $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemple 2.2

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{tr}(A) = 1 + 6 + 11 + 16 = 34$.

Propriétés 2.3

Soient A et B deux matrices carrées de même ordre et λ un scalaire.

1. $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
2. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
3. $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\ \mathrm{tr}(A)$.
4. $\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(B \times A)$.

Démonstration

Soient $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1,n}$.
On pose ${}^tA = (\alpha_{ij})_{i,j=1,n}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j = 1,p$.

1. On a $\alpha_{ii} = a_{ii}$.
2. $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1,n}$
   $\mathrm{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
3. $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
   $\mathrm{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \mathrm{tr}(A)$
4. Si $A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ et $B \times A = (d_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj}$, on obtient
   $\mathrm{tr}(A \times B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$ et $\mathrm{tr}(B \times A) = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{li} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{lj} b_{jl}$.

Remarques 2.4

- L'application $\varphi : \mathscr{M}_n(K) \to K$ est une forme linéaire.
  $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$
- En général, $\mathrm{tr}(A \times B) \neq \mathrm{tr}(A) \times \mathrm{tr}(B)$.
  Par exemple, soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
  On a $\mathrm{tr}(I) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 6$ et $\mathrm{tr}(I \times A) = 6$.

III. Matrice et inverse

Définition 3.1

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$.
On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice $\tilde{A}$ telle que $A \times \tilde{A} = \tilde{A} \times A = I_n$.
La matrice $\tilde{A}$ est appelée matrice inverse de A ou simplement inverse de A et est notée A^{-1}.

Remarque 3.2

Il y a unicité de la matrice inverse $\tilde{A}$ $(= A^{-1})$ lorsqu'elle existe.

Exemple 3.3

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 3.4

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(K)$.
On a :
1. ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
2. $A\times B$ est inversible et $(A\times B)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$.

Démonstration

1. $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$
   ${}^t(A \times A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \times A) = {}^tI_n$
   ${}^t(A^{-1}) \times {}^tA = {}^tA \times {}^t(A^{-1}) = I_n$
2. $$\begin{aligned}(A\times B)\times B^{-1}\times A^{-1} &= A\times B\times B^{-1}\times A^{-1}\\ &= A\times I\times A^{-1}\\ &= A\times A^{-1}\\ &= I\end{aligned}$$
   De même pour $B^{-1}\times A^{-1}\times(A\times B)$.

Définition 3.5

Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(K)$.
On étend la définition de A^k pour tout entier $k\in\mathbb{Z}$ en posant $A^k = (A^{-1})^{-k}$ si $k \leq 0$.

Propriété 3.6

Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(K)$ et soit $p,q\in\mathbb{N}$.
On a : $A^p \times A^q = A^{p+q}$
$(A^p)^q = A^{p\times q}$
De plus, ces égalités sont vraies pour $p,q\in\mathbb{Z}$ si A est inversible.

Démonstration

Il suffit d'étudier les différents cas : n,p positifs, n,p négatifs et n positif et p négatif et utiliser les définitions.

IV. Déterminants

1. Méthode élémentaire de calcul des déterminants 2×2 et 3×3

Définition 4.1

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}.$$

Exemples 4.2

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$
- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

  $= 2 \times 1 - 1 \times 7 - 2 \times (-31)$

  $= 2 - 7 + 62 = 57.$

Remarque 4.3

On définit de manière récursive le déterminant d'une matrice $n \times n$ en utilisant la grille de signes suivante :

$+ - + - + ...$

$- + - + - ......$

$+ - + - + ...$

$- + - + - ......$

Il suffit de "développer" la matrice suivant une ligne ou une colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \times \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \times \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - m \times \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}.$$

Exemple 4.4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 5 \times 8 \times 10 = 1 \times 5 \times 8 \times 10.$$

2. Simplification

Propriétés 4.5

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient a_1, a_2, ..., a_n les vecteurs colonnes (resp. lignes) de A.

a. Soit B est la matrice obtenue à partir de A en multipliant l'un des a_i par un réel k alors $\det(B) = k \det(A)$.

b. Soit B est la matrice obtenue à partir de A en échangeant deux a_i alors $\det(B) = -\det(A)$.

c. Soit B est la matrice obtenue à partir de A en additionnant à l'un des a_i une combinaison linéaire des autres alors $\det(B) = \det(A)$.

Exemples 4.6

- $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 7 \times \left(1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 7 \times (3 + 3) = 42.$

- $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.$

  On aurait pu calculer directement à partir de la grille des signes.
- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -5 & -11 \\ -2 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \times (-4) = -24.$

Remarques 4.7

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

- Si l'une des colonnes (resp. lignes) de A est nulle alors $\det(A) = 0$.
- Si l'une des colonnes (resp. lignes) de A est une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) alors $\det(A) = 0$.

Propriétés 4.8

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

- A est inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$.
- A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Propriétés 4.9

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$.

a. $\det(A) = \det({}^tA)$.

b. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

c. Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Propriété 4.10

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et, dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

V. Méthodes pratiques d'inversion d'une matrice 3×3

Méthode 1

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$.

On appelle opération élémentaire sur les lignes $(L_i)_{i=1,n}$ de M l'une des opérations suivantes :

- échanger la $i$ème ligne avec la $j$ème : $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplier la $i$ème ligne par un scalaire α non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- ajouter la $j$ème ligne à la $i$ème ligne : $L_i \leftarrow L_i + L_j$

On peut, en particulier, remplacer la $i$ème ligne par la somme d'un multiple (non nul) d'elle-même et d'un multiple de la $j$ème ligne : $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, on cherche donc $\tilde{A}$ telle que $A\tilde{A} = \tilde{A}A = I$.
On suppose que l'on a vérifié que A est inversible.
On va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice composée de la juxtaposition de A et de I_3. Le but est d'obtenir une inversion de la position de la matrice I_3. Celle-ci se trouve à droite à la première étape et à gauche à la dernière étape. Lorsque l'on a effectué ce changement à l'aide des opérations élémentaires, il suffit de lire la matrice inverse.

On pose donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

D'où $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2

Définition 5.1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$, avec $n \geq 2$, de terme général a_{ij}.
$\forall i,j = 1,n$, soit $A_{i,j}$ la matrice obtenue de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.
On appelle mineur de a_{ij} dans A le déterminant $\det A_{i,j}$.
La quantité $\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ st appelée cofacteur du coefficient a_{ij}.

On appelle comatrice de A et on note Com A la matrice carrée d'ordre n et de terme général α_{ij}.

Exemple 5.2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Com} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

Propriété 5.3

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ où $n \geq 2$.
Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t(\mathrm{Com}\,A)$.

Exemple 5.4

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, alors $\det A = -64$ et ${}^t(\mathrm{Com}\,A) = \begin{pmatrix} -8 & -16 & 8 \\ -24 & 8 & 0 \\ 16 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

VI. Matrices et bases

Définition 6.1

Soit E un K-e.v. de dimension n et soient (e) et (e') deux bases de E.
On appelle matrice de passage de (e) à (e') et on note $P_{e \to e'}$ la matrice formée des vecteurs colonnes des coordonnées des vecteurs de (e') dans la base (e).

Exemple 6.2

Si $(e) = (e_1, e_2)$ et $(e') = (e'_1, e'_2)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ telles que $e'_1 = -e_1 + 3e_2$ et $e'_2 = -2e_1 + 5e_2$, alors on a $P_{e \to e'} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque 6.3

Si $(e) = (e_1, e_2, ..., e_i, ... , e_n)$ et $(e') = (e'_1, e'_2, ..., e'_j, ... , e'_n)$ sont deux bases d'un K-e.v. E avec $e'_j = a_{1j}.e_1 + a_{2j}.e_2 + ... + a_{ij}.e_i + ... + a_{nj}.e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ pour tout $j = 1,n$, alors on a $P_{e \to e'} = (a_{ij})_{i=1,n\; j=1,n}$.

Propriété 6.4

Soit E un K-e.v. de dimension finie.
Soient (e) et (e') deux bases de E.
Alors la matrice de passage de (e) à (e') est inversible et $(P_{e \to e'})^{-1} = P_{e' \to e}$

Propriété 6.5

Soit E un K-e.v. de dimension n.
Soient $(e) = (e_1,e_2,......,e_n)$ et $(e') = (e'_1,e'_2,......,e'_n)$ deux bases de E.

Soit u un vecteur de E tel que $u = x_1.e_1 + x_2.e_2 + ... + x_j.e_j + ... + x_n.e_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ i.e. $[u]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $u = x'_1.e'_1 + x'_2.e'_2 + ... + x'_j.e'_j + ... + x'_n.e'_n = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k$ i.e. $[u]_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Alors on a : $[u]_e = P_{e \to e'} \times [u]_{e'}$.

Démonstration

On suppose $P_{e \to e'} = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.

C'est-à-dire $e'_j = a_{1j}.e_1 + a_{2j}.e_2 + ... + a_{ij}.e_i + ... + a_{nj}.e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pour tout $i = 1,n$.

$u = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k = \sum_{k=1}^{n} x'_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_k\right) e_i$.

On a donc $x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_k$ pour tout $j = 1,n$.

On vérifie aisément que cela correspond à : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

VII. Matrices associées à une application linéaire

Dans tout cette partie, E et F sont deux K-e.v. de dimensions respectives p et n.
$(e) = (e_1,e_2,......,e_p)$ est une base de E et $(\varepsilon) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,......,\varepsilon_n)$ est une base de F.

Propriété 7.1

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F.
$[\ \forall i = 1,p,\ f(e_i) = g(e_i)\ ] \iff f = g$.

Remarque 7.2

Cela signifie que f est entièrement déterminé par les images des vecteurs de la base.
C'est-à-dire la connaissance des $(f(e_i))_{i=1,p}$ suffit pour connaître f.

Démonstration

Par définition, $f = g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

($\Rightarrow$) Cette égalité est vraie, entre autres, pour les e_i $\forall i = 1,p$.

($\Leftarrow$) $\forall x \in E, \exists!(x_i) \in K^p \,/\, x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$.

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} x_i g(e_i) = g\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = g(x).$$

Définition 7.3

Soit $f \in \mathscr{L}_K(E,F)$.
On appelle matrice représentative ou matrice associée ou matrice image de f dans les bases (e) et (ε) et on note $\mathscr{M}_{e\varepsilon}(f)$ la matrice $n \times p$ à coefficients dans K dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des images par f de chacun des e_i dans la base (ε).

Exemple 7.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \mapsto (x - y, -3x + 2y, 5x + y)$
On vérifie aisément que f est une application linéaire.
Soit (e) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit (e') la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a $\mathscr{M}_{ee'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 7.5

Avec les notations de la définition précédente, on a :

$$\mathscr{M}_{e\varepsilon}(f) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} \end{array} \quad \text{où } f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i \quad \forall j = 1, p.$$

Propriété 7.6

Soit $f \in \mathscr{L}_K(E,F)$ et soit $M = \mathscr{M}_{e\varepsilon}(f)$.
Si u a pour coordonnées U dans (e) alors $f(u)$ a pour coordonnées $M \times U$ dans (ε)

Remarque 7.7

Autrement dit, $[f(u)]_\varepsilon = \mathscr{M}_{e\varepsilon}(f) \times [u]_e$.

Exemple 7.8

Soit (e) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit (e') la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \mapsto (y - z, 2x + 3y + 5z)$
On vérifie aisément que f est une application linéaire.
On a $\mathscr{M}_{ee'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $[u]_e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
On a $\mathscr{M}_{ee'}(f) \times [u]_e = \begin{pmatrix} y - z \\ 2x + 3y + 5z \end{pmatrix} = [f(u)]_{e'}$.

Démonstration

M est une matrice $n \times p$ et X est une matrice $p \times 1$. Donc MX est une matrice $n \times 1$.

$$M = \mathscr{M}_{e\varepsilon}(f) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} \end{array} \quad \text{où } f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i \quad \forall j = 1, p.$$

$A \times X = (\gamma_i)_{i=1,n}$ où $\gamma_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}x_k$. Donc $f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}x_i\right)\varepsilon_i$.

C'est-à-dire $y_i = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}x_i = \gamma_i$.

Propriété 7.9

L'application $\varphi : \mathscr{L}_K(E,F) \to \mathscr{M}_{np}(K)$ est un isomorphisme de K-e.v.

$f \mapsto \mathscr{M}_{e\varepsilon}(f)$

Remarques 7.10

- On a donc $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ $\forall f,g \in \mathscr{L}_K(E,F)$ $\forall k \in K$
  $\varphi(kf) = k\varphi(f)$
  φ bijective.
- On peut donc définir une application linéaire par sa matrice dans deux bases données.

Démonstration

- Soient $f,g \in \mathscr{L}_K(E,F)$ et $\lambda,\mu \in K$.

$$\mathscr{M}_{e\varepsilon}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \qquad \text{où } f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i \quad \forall j = 1, p.$$

$$\mathscr{M}_{e\varepsilon}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} g(e_1) & g(e_2) & \cdots & g(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \qquad \text{où } g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\varepsilon_i \quad \forall j = 1, p.$$

On pose $h = \lambda f + \mu g$.

$$\mathscr{M}_{e\varepsilon}(\lambda f + \mu g) = \mathscr{M}_{ee'}(h) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} h(e_1) & h(e_2) & \cdots & h(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \qquad \text{où } h(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\varepsilon_i \quad \forall j = 1, p.$$

$\forall j=1,p$, $(\lambda f + \mu g)(e_j) = \lambda f(e_j) + \mu g(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})\varepsilon_i$.

Donc $\forall i=1,n$ $\forall j=1,p$ $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$.

D'où $(c_{ij}))_{i=1,n\ j=1,p} = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} = \lambda(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} + \mu(b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$.

C'est-à-dire $\mathscr{M}_{e\varepsilon}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{M}_{e\varepsilon}(f) + \mu\mathscr{M}_{e\varepsilon}(g)$.

- Comme φ est linéaire, il suffit de vérifier que φ est injective.

$\mathscr{M}_{e\varepsilon}(f) = \mathscr{M}_{e\varepsilon}(g) \iff (f(e_{ij}))_{i=1,n\ j=1,p} = (g(e_{ij}))_{i=1,n\ j=1,p}$

$\iff \forall i=1,n\ \forall j=1,p\ \ f(e_{ij}) = g(e_{ij})$

$\iff \forall j=1,p\ \ f(e_j) = g(e_j)$

$\iff f = g$.

Propriété 7.11

Soit G un K-e.v. de dimension q.
Soit (η) une base G.
Soient $f \in \mathscr{L}_K(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}_K(F,G)$. On a :

a. $\mathscr{M}_{e\eta}(g \circ f) = \mathscr{M}_{\varepsilon\eta}(g) \times \mathscr{M}_{e\varepsilon}(f)$ $(\in \mathscr{M}_{q,p'}(K), \in \mathscr{M}_{q,n'}(K), \in \mathscr{M}_{n,p'}(K))$.

b. Si f est un isomorphisme, $\mathscr{M}_e(f^{-1}) = (\mathscr{M}_e(f))^{-1}$.

Propriété 7.12

Soit $f \in \mathscr{L}_K(E,F)$ et soit $M = \mathscr{M}_{e\varepsilon}(f)$.
On a rg$(f) = \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}(\mathscr{M}_{e\varepsilon}(f))$.

Démonstration

Cela provient directement de $\mathrm{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), \ldots f(e_p) \rangle$.

VIII. Systèmes d'équations linéaires

Définition 8.1

On appelle système d'équations linéaires un système du type : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ (1)

où les $(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et les $(b_j)_{j=1,p}$ sont des éléments d'un corps K et les $(x_i)_{i=1,n}$ des inconnues.

Propriété 8.2

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

- Le système (1) correspond à l'équation $AX = B$.
- Le système (1) possède une unique solution si et seulement si $n = p$ et A est inversible. Dans ce cas, l'équation $AX = B$ est alors équivalente à $X = A^{-1}B$.

Méthode de Gauss

Elle correspond à la méthode dite "par combinaisons".

Soit le système : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ qui correspond à une équation matricielle $AX = B$.

Si tous les a_{i1} sont nuls, alors les x_1 n'interviennent pas et on passe à la deuxième colonne. Si l'un des a_{i1} est non nul, en échangeant les lignes, on peut supposer qu'il s'agit de a_{11}, on remplace alors toutes les lignes L_i par $a_{11}L_i - a_{i1}L_1$ pour $2 \leq i \leq n$. En pratique, s'il existe plusieurs coefficients a_{i1} $(1 \leq i \leq n)$ non nuls, on échange les lignes de façon à mettre en première ligne celle du coefficient le plus "simple".

On obtient donc un nouveau système équivalent : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{n2}x_2 + ... + a_{np}x'_p = b'_n \end{cases}$

On s'intéresse maintenant aux $(n-1)$ dernières lignes comme précédemment. On considère ces lignes comme si elles étaient indépendantes.

Si tous les a_{i2} pour $i \geq 2$ sont nuls, alors les x_2 n'interviennent pas et on passe à la colonne suivante. Si l'un des a_{i2} est non nul, en échangeant les lignes, on peut supposer qu'il s'agit de a_{22}, on remplace alors toutes les lignes L_i par $a_{22}L_i$ - $a_{i2}L_2$ pour $3 \leq i \leq n$.

On réitère ces opérations jusqu'à ce que l'on obtienne un système triangulaire.

Suivant les valeurs de p de n et du rang de la matrice A, on obtient différent résultats.

Par exemple, si $n = p$ et si $\text{rg}(A) = p$, on obtient un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1p-1}x_{p-1} + a_{1p}x_p = c_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2p-1}x_{p-1} + a_{2p}x_p = c_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + ... + a_{3p-1}x_{p-1} + a_{3p}x_p = c_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{p-1p-1}x_{p-1} + a_{p-1p}x_p = c_{p-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{pp}x_p = c_p \end{cases}$$

Et donc une unique solution que l'on obtient en remplaçant de façon récursive les différentes valeurs des x_i pour i de p à 1.

Exemples 8.3

1. $$\begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ 3x - 2y + 4z - t = 1 \\ x - y + z + t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ 4y - 2z + 5t = 7 \\ y - z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ y - z + 3t = 1 \\ 4y - 2z + 5t = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ y - z + 3t = 1 \\ 2z - 7t = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}t \\ y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \\ x = -4t \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+3y+z=3 \\ 4x+7y+z=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 5y+3z=5 \\ 5y+3z=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5}z \\ y=-\dfrac{3}{5}z+1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+3y+z=3 \\ 4x+7y+z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 5y+3z=5 \\ 5y+3z=-3 \end{cases}$$