Matrices et systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls et K est un corps commutatif.
En pratique, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Généralités

Définition 1.1

Une matrice A de type (n, p) est une application de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ dans K.
On note $a_{i,j}$ l'image du couple (i, j) par l'application A.
Les a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice A.
On écrit alors $A = (a_{i,j})_{i = 1..n,\, j = 1..p}$.

Notation 1.2

- On note $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$, $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ ou $\mathscr{M}_{np}(K)$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans K.
- Pour décrire un élément A de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$, on dispose les coefficients dans un tableau à n lignes et p colonnes, le coefficient $a_{i,j}$ venant se placer à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- Par exemple, la matrice A de type (3, 2) définie par :

  $a_{1,1} = 5$, $a_{1,2} = 3$, $a_{2,1} = 0$, $a_{2,2} = 7$, $a_{3,1} = 4$ et $a_{3,2} = 1$ se note $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
- Finalement, c'est ce tableau lui-même qu'on finit par appeler une matrice.
  On dit donc qu'un élément M de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$ est une matrice à n lignes et à p colonnes.
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,n\; j=1,p}$

Remarque 1.3

Si $A = (a_{i,j})_{i = 1..n,\, j = 1..p}$, on dit aussi moins formellement que A est la matrice de terme général a_{ij}.

Définition 1.4

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\; j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n'\; j=1,p'}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n'p'}(K)$.

On dit que $A = B$ si et seulement si $\begin{cases} n = n' \\ p = p' \\ a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, n\ \forall j = 1, p \end{cases}$

Définition 1.5

Les coefficients $a_{i,i}$ (l'indice de colonne est égal à l'indice de ligne) d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(K)$ sont appelés coefficients diagonaux. Ils forment ce qu'on appelle la diagonale de A.
Les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i > j$ sont dit en dessous de cette diagonale, alors que les coefficients $a_{i,j}$ tels que $j > i$ sont dit au dessus de celle-ci.

Définitions 1.6

On dit que $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p} \in \mathscr{M}_{np}(K)$ est :

- une matrice ligne si et seulement si $n = 1$.
- une matrice colonne si et seulement si $p = 1$.
- une matrice carrée si et seulement si $n = p$.
- une matrice diagonale si et seulement si A est une matrice carrée A telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- une matrice unité si et seulement si A est une matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1 \ \ \forall i=1,n$.
- une matrice scalaire si et seulement si A est une matrice diagonale telle que $a_{ii} = a_{jj}$ $\forall i=1,n$ $\forall j=1,n$.
- une matrice triangulaire supérieur si et seulement si A est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
- une matrice triangulaire inférieur si et seulement si A est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
- une matrice strictement triangulaire supérieur ssi A est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$.
- une matrice strictement triangulaire inférieur ssi A est une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ si $i \leq j$.

Remarques 1.7

- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(K)$.
- On identifie les éléments suivants :
  Les matrices colonnes et les vecteurs colonnes c'est-à-dire $\mathscr{M}_{n1}(K)$ et K^n.
  Les matrices lignes et les vecteurs lignes c'est-à-dire $\mathscr{M}_{1p}(K)$ et K^p.
  Les matrices carrées d'ordre 1 et les éléments de K c'est-à-dire $\mathscr{M}_{1,1}(K)$ et K.

Définition 1.8

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On appelle vecteur colonne de A, toute colonne extraite de A identifiée à un vecteur de K^n.
On appelle vecteur ligne de A, toute ligne extraite de A identifiée à un vecteur de K^p.

Définition 1.9

On appelle matrice nulle de $\mathscr{M}_{np}(K)$ la matrice $n \times p$ composée uniquement de 0.
La matrice nulle est notée 0.

Définition 1.10

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(K)$.
On définit la loi + sur $\mathscr{M}_{np}(K)$ par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$

Remarque 1.11

Ce qui peut s'exprimer en disant que, si A est la matrice de terme général a_{ij} et si B est la matrice de terme général b_{ij}, alors $A + B$ est la matrice de terme général $a_{ij} + b_{ij}$.

Propriété 1.12

$(\mathscr{M}_{np}(K),+)$ est un groupe abélien c'est-à-dire

1. $\forall A,B\in \mathscr{M}_{np}(K),\ A+B\in \mathscr{M}_{np}(K)$ (loi de composition interne).
2. $\forall A,B,C\in \mathscr{M}_{np}(K),\ A+(B+C)=(A+B)+C$ (associativité).
3. $\forall A\in \mathscr{M}_{np}(K),\ A+0=0+A=A$ (élément neutre).
4. $\forall A\in \mathscr{M}_{np}(K),\ \exists \tilde{A}\in \mathscr{M}_{np}(K)\ /\ A+\tilde{A}=\tilde{A}+A=0$ (symétrique).
5. $\forall A,B\in \mathscr{M}_{np}(K),\ A+B=B+A$ (commutativité).

Remarques 1.13

- On note $-A$ la matrice $\tilde{A}$ du 4°). Si $A=(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$, on a alors $-A=(-a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$.
- On peut définir $A-B$ par $A+(-B)$.

Démonstration

On pose $A=(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$, $B=(b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $C=(c_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$

1. Par définition de l'addition.
2. $A+(\ B+C\ )=A+(b_{ij}+c_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}=(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ (symétrique en a,b et c)
3. $A+0=(a_{ij}+0)_{i=1,n\ j=1,p}=(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}=A$.
4. On a $\tilde{A}=-A=(-a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
   $A+\tilde{A}=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{i=1,n\ j=1,p}=(0)_{i=1,n\ j=1,p}\ =0$.
5. $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}=(b_{ij}+a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}=B+A$.

Définition 1.14

Soit $A=(a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$. Soit $\lambda\in K$.
On définit la loi externe . sur $\mathscr{M}_{np}(K)$ à domaine d'opérateur K par $\lambda.A=(\lambda\times a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$

Remarques 1.15

- La loi . n'est généralement pas notée.
- $(-1)\times A=-A$.
- Si A est la matrice de terme général a_{ij}, $\lambda\,A$ est la matrice de terme général $\lambda\times a_{ij}$.

Propriété 1.16

$(\mathscr{M}_{np}(K),+,.)$ est un K-e.v.

Remarque 1.17

L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ est de dimension $n\times p$ sur K.
Une base de $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ est formée des matrices $E_{i,j}$ où pour tout i dans $\{1, ... , n\}$ et tout j dans $\{1, ... , p\}$ tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui situé en ligne i et colonne j qui vaut 1.
Cette base est dite canonique.
Par exemple, une base de $\mathscr{M}_{3,2}(K)$ est formée des matrices :

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{3,1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix} \text{ et } E_{3,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Définition 1.18

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{np}(K)$ et soit $B = (b_{ij})_{i=1,p\ j=1,q}$ une matrice de $\mathscr{M}_{pq}(K)$.
On appelle produit de A par B et on note $A \times B$ la matrice de $\mathscr{M}_{nq}(K)$ définie par

$$A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,q} \qquad \text{où} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarques 1.19

- Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.
  On peut donc résumer en écrivant :
  [matrice de type (n, p)] $\times$ [matrice de type (p, q)] $\rightarrow$ [matrice de type (n, q)].
- Si $A \in \mathscr{M}_{np}(K)$, on peut calculer à la fois $A \times B$ et $B \times A$ que si $B \in \mathscr{M}_{pn}(K)$.
  Dans ce cas, $A \times B \in \mathscr{M}_{n}(K)$ et $B \times A \in \mathscr{M}_{p}(K)$.
  Si $n \neq p$, les matrices $A \times B$ et $B \times A$, de formats différents, ne sauraient être égales.
- La loi $\times$ est une loi de composition interne que si l'on considère un ensemble de matrices carrées.
  C'est-à-dire, si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $A \times B$ et $B \times A$ sont aussi deux matrices carrées d'ordre n.
  Mais, en général, on a $A \times B \neq B \times A$. Dans le cas contraire, on dit que A et B commutent.
- On note aussi $A.B$ ou simplement AB le produit de la matrice A par la matrice B.

Propriété 1.20

Soient $\lambda \in K$, $A \in \mathscr{M}_{np}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{pq}(K)$.
On a : $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$.

Démonstration

$A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,p\ j=1,q}$.

$A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,q}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$\lambda(A \times B) = (\lambda c_{ij})_{i=1,n\ j=1,q}$ avec $\lambda c_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (\lambda a_{ik}) b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (\lambda b_{kj})$.

Propriété 1.21

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + c'est-à-dire :

$\forall A,B,C \in \mathscr{M}_{n}(K)$, $\quad A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ (distributivité à gauche)
$\quad (B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$ (distributivité à droite).

Démonstration

On pose $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ et $C = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.
On a $B + C = (b_{ij} + c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$

$A \times (B + C) = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}$

$A \times B = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}$

$A \times C = (\chi_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\chi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

D'où le résultat.

Propriété 1.22

$(\mathscr{M}_n(K),\times)$ est un monoïde c'est-à-dire

1. $\forall A,B\in \mathscr{M}_n(K),\ A\times B\in \mathscr{M}_n(K)$ (loi de composition interne).
2. $\forall A,B,C\in \mathscr{M}_n(K),\ A\times (B\times C) = (A\times B)\times C$ (associativité).
3. $\exists I\in \mathscr{M}_n(K)\ /\ \forall A\in \mathscr{M}_n(K),\ A\times I = I\times A = A$ (élément neutre).

Démonstration

On pose $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ et $C = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.

1. Par définition.
2. On a $B\times C = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}$

   $A\times(B\times C) = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\gamma_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$

   On a $A\times B = (\chi_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\chi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

   $(A\times B)\times C = (\phi_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\phi_{ij}= \sum_{l=1}^{n} \phi_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$
3. Elément neutre $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & . & \vdots \\ \vdots & . & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a $I_n = (e_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ avec $e_{ij} = 0$ si $i\neq j$ et $e_{ij} = 1$ si $i = j$ $(e_{ij} = \delta_{ij})$.

   $A\times I_n = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj} = a_{ij}\ e_{jj} = a_{ij}$.

   $I_n\times A = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}a_{kj} = e_{jj}\ a_{ij} = a_{ij}$.

Remarques 1.23

- $(\mathscr{M}_n(K),+,\times)$ est un anneau unifère.
- Le produit des matrices n'est pas commutatif.
- Les matrices scalaires λI_n commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(K)$.
- Dans $\mathscr{M}_n(K)$, les puissances entières positives de matrices sont définies par
  $A^0 = I,\ \ A^1 = A$ et $A^n = A\times A\times \dots\times A$ (n fois) pour tout entier $n\geq 2$.
- Dans $\mathscr{M}_n(K)$, on peut utiliser la formule du binôme : $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^{p-k}B^k$, à l'unique condition que les matrices A et B commutent!
- Si $n\geq 2$, l'anneau $\mathscr{M}_n(K)$ contient des diviseurs de zéro.
  L'égalité $AB = 0$ n'implique donc pas $A = 0$ ou $B = 0$.
  Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  De même, les égalités $AB = AC$ ou $BA = CA$ n'impliquent pas nécessairement $B = C$.
  Un diviseur de zéro (resp. à gauche, à droite) n'est pas simplifiable (resp. à gauche, à droite).

Propriété 1.24

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ deux matrices triangulaires supérieures.
On a donc $a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$ dès que $i > j$.
$A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,q}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
Si $i > j$, $j \neq n$ et $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
Or, si $k \leq j$ alors $i > k$ et $a_{ik} = 0$. Donc $\sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj} = 0$.
De même, si $k > j$ alors $b_{kj} = 0$ et donc $\sum_{k=j+1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$.
D'où $c_{ij} = 0$ si $i > j$ c'est-à-dire $A \times B$ triangulaire supérieure.

Propriété 1.25

Soit A une matrice triangulaire supérieure.
Alors, pour tout entier naturel k, A^k est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $a_{ii}{}^k$.

Remarques 1.26

- On a le même résultat si on remplace triangulaire supérieure par triangulaire inférieure ou par diagonale.
- Ce résultat s'étend aussi aux entiers relatifs si la matrice A est inversible (notion vue plus loin).

Démonstration

On montre trivialement (par récurrence par exemple) que les matrices A^k sont triangulaires supérieures.
Il reste à montrer le résultat sur les coefficients diagonaux.

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ une matrice triangulaire supérieure.
- Vrai au rang 0 et au rang 1.
- On suppose vrai au rang p c'est-à-dire $A^p = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ avec $b_{ij} = 0$ dès que $i > j$ et $b_{ii} = a_{ii}{}^p$.
  On pose $A^{p+1} = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.
  On a $A^{p+1} = A \times A^p$.
  Donc $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
  On a déjà similairement montré que $c_{ij} = 0$ si $i > j$ c'est-à-dire A^{p+1} triangulaire supérieure.
  Il reste à calculer c_{ii}.
  $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{ki}$.
  Lorsque $k < i$, on a $a_{ik} = 0$ et donc $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} = 0$.
  Lorsque $k > i$, on a $b_{ki} = 0$ et donc $\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{ki} = 0$.
  D'où $c_{ii} = a_{ii}\, b_{ii} = a_{ii}\, a_{ii}{}^p = a_{ii}{}^{p+1}$.

Rappel 1.27

On dit qu'un élément a d'un groupe (noté multiplicativement) est nilpotent d'ordre k (entier non nul) lorsque $a^{k-1} \neq 0$ et $a^k = 0$.
On dit qu'un élément a d'un groupe est nilpotent s'il existe un entier k tel que a soit nilpotent d'ordre k.

Propriété 1.28

Toute matrice A strictement triangulaire est nilpotente.

Démonstration

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ une matrice strictement triangulaire supérieure.
Soit p un entier naturel non nul, nous allons montrer que si $A^p = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ alors, pour tout entier i compris entre 1 et n, $b_{ij} = 0$ si $i \geq j - p + 1$.

- Vrai au rang 1.
- On suppose vrai au rang p c'est-à-dire $A^p = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$ avec $b_{ij} = 0$ dès que $i \geq j - p + 1$.
  On pose $A^{p+1} = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.
  On a $A^{p+1} = A \times A^p$.
  Donc $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.
  Si $i \geq j - p$ (≥ 1), $c_{ij} = \sum_{k=1}^{j-p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j-p+1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.
  Lorsque $k \leq j - p$, on a $i \geq k$ et $a_{ik} = 0$. Donc $\sum_{k=1}^{j-p} a_{ik}b_{kj} = 0$.
  Lorsque $k \geq j - p + 1$, on a $b_{kj} = 0$ et donc $\sum_{k=j-p+1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$.

Remarques 1.29

- Plus précisément, si A appartient à $\mathscr{M}_n(K)$ et si A est strictement triangulaire, alors $A^n = 0$.
  Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a bien $A^2 = 0$.
- Pour qu'une matrice carrée soit nilpotente, il n'est pas nécessaire qu'elle soit strictement triangulaire. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$.
- Si une matrice carrée A d'ordre n est nilpotente, il est certain que $A^n = 0$.
  Inversement, si A est carrée d'ordre n et si $A^n \neq 0$, alors toutes les puissances de A sont non nulles.

2. Matrice et inverse

Définition 2.1

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$.
On dit que A est inversible si et seulement s'il existe une matrice $\tilde{A}$ telle que $A \times \tilde{A} = \tilde{A} \times A = I_n$.
On note A^{-1} la matrice $\tilde{A}$.

Remarques 2.2

- Il y a unicité de la matrice inverse A^{-1} lorsqu'elle existe.
- Bien que le produit dans $\mathscr{M}_n(K)$ ne soit pas commutatif, l'une des deux égalités $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ implique l'autre, et donc $B = A^{-1}$.
- Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$.
  A est inversible $\Leftrightarrow$ A est simplifiable
  $\Leftrightarrow$ A n'est pas un diviseur de 0.

Propriété-Définition 2.3

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(K)$ est un groupe pour la loi produit appelé groupe linéaire d'indice n et noté $GL_n(K)$.

Propriété 2.4

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(K)$. On a $(A\times B)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$.

Démonstration

$(A\times B)\times B^{-1}\times A^{-1} = A\times B\times B^{-1}\times A^{-1} = A\times I\times A^{-1} = A\times A^{-1} = I$
De même pour $B^{-1}\times A^{-1}\times(A\times B)$.

Remarque 2.5

Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(K)$.
On peut donc définir A^k pour tout entier négatif k de la façon suivante : $A^k = (A^{-1})^{-k}$ avec $-k \geq 0$.

Propriété 2.6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3. Matrices équivalentes et matrices semblables

Définition 3.1

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$ sont dites équivalentes s'il existe une matrice inversible Q d'ordre n et une matrice inversible P d'ordre p telles que $B = QAP$.

Définition 3.2

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(K)$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarques 3.3

- Si deux matrices sont semblables, elles sont équivalentes. La réciproque est fausse.
- Si $B = P^{-1}AP$, alors pour tout entier naturel n on a : $B^n = P^{-1}A^nP$.
  Cette relation s'étend aux exposants négatifs si A et (donc) B sont inversibles.

Propriétés 3.4

- La relation définie par "A est équivalente à B" est une relation d'équivalence dans $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$.
- La relation définie par "A est semblable à B" est une relation d'équivalence dans $\mathscr{M}_n(K)$.

4. Transposée d'une matrice

Définition 4.1

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathcal{M}_{np}(K)$.
On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$ définie par :
${}^tA = (\alpha_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$

Remarques 4.2

- Lorsque l'on transpose, les vecteurs colonnes de la matrice sont changés en vecteurs lignes et inversement.
- Lorsque l'on transpose une matrice carrée, les éléments diagonaux (ceux qui appartiennent à la diagonale) sont inchangés.

Propriété 4.3

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(K)$ et soit $\lambda \in K$. Alors on a :

- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$

Remarque 4.4

On peut résumer ses propriétés en disant que la transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n\times p}(K)$ dans $\mathcal{M}_{p\times n}(K)$ et que, si on se restreint à $\mathcal{M}_n(K)$, la transposition est un automorphisme involutif.

Démonstration

Soient $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ et $B = (b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$.
On pose ${}^tA = (\alpha_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$
On pose ${}^tB = (\beta_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\beta_{ij} = b_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  ${}^t(A + B) = (\gamma_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = a_{ji} + b_{ij}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$
  ${}^tA + {}^tB = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$
  Or $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = a_{ji} + b_{ij} = \gamma_{ij}\ \ \ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$
- $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$
  ${}^t(\lambda A) = (\gamma_{ij})_{i=1,p\ j=1,n}$ où $\gamma_{ij} = \lambda a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$
  $\lambda({}^tA) = (\lambda\alpha_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ où $\lambda\alpha_{ij} = \lambda a_{ji}\ \ \forall i=1,p\ \ \forall j=1,n$

Propriété 4.5

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(K)$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{pq}(K)$. On a ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Remarque 4.6

${}^tB$ est une matrice de $\mathcal{M}_{qp}(K)$ et ${}^tA$ est une matrice de $\mathcal{M}_{pn}(K)$.
Donc ${}^tB \times {}^tA$ est une matrice de $\mathcal{M}_{qn}(K)$.

Démonstration

$A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ $\quad B = (b_{ij})_{i=1,p\ j=1,m}$

On pose $A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

${}^t(A \times B) = (\gamma_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $\gamma_{ij} = c_{ji}$ $\forall i=1,p$ $\forall j=1,n$

${}^tB \times {}^tA = (\delta_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \gamma_{ij}$.

Propriété 4.7

Soit A une matrice carrée.
Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration

On a, par définition, $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$

D'où ${}^t(A^{-1}) \times {}^tA = {}^t(A \times A^{-1}) = {}^tI_n = I_n$

${}^tA \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \times A) = {}^tI_n = I_n$.

Propriété 4.8

$\forall A \in \mathscr{M}_n(K)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$.
Si A est inversible, cette égalité est valable pour tout entier relatif k.

Démonstration

- Par récurrence pour les entiers positifs.
- Vrai pour $k = -1$.
- $A^k = (A^{-1})^{-k}$ pour $k < 0$.

Définition 4.9

Soit A une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(K)$.
On dit que A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.
On dit que A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

Remarques 4.10

Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ est un matrice de $\mathscr{M}_n(K)$,

- A est symétrique si $a_{ji} = a_{ij}$ $\forall i,j = 1,n$.
- A est antisymétrique si $a_{ji} = -a_{ij}$ $\forall i,j = 1,n$.
- La diagonale d'une matrice antisymétrique est forcement nulle.

Notation

On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui sont symétriques.
On note $A_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ qui sont antisymétriques.

Corollaire 4.11

Si A est inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique.
Si A est inversible et antisymétrique alors A^{-1} est antisymétrique.

Démonstration

Voir propriété 4.7.

Corollaire 4.12

Si A est symétrique alors, pour tout entier naturel k, A^k est symétrique.
Si A est inversible, cette propriété est valable pour tout entier relatif k.

Démonstration

En effet, ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k = A^k$.

Corollaire 4.13

Si A est antisymétrique, les puissances paires de A sont symétriques et les puissances impaires de A sont antisymétriques.

Démonstration

En effet, ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k = (-1)^k A^k$.

Propriété 4.14

$S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(K)$.
La dimension de $S_n(K)$ est $\frac{1}{2}n(n+1)$ et celle de $A_n(K)$ est $\frac{1}{2}n(n-1)$.
Toute matrice M de $\mathscr{M}_n(K)$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A.
S et A sont respectivement données par $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.

Démonstration

On a bien : $S + A = M$, ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$.
De plus, soit P une matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique.
$P = {}^tP = -P$ c'est-à-dire $2P = 0$ et enfin $P = 0$.

5. Trace d'une matrice

Définition 5.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n (i.e. $A \in \mathscr{M}_n(K)$).
On appelle trace de A la somme des éléments diagonaux de A.
C'est-à-dire si $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, on a $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Propriétés 5.2

Soit A et B deux matrices carrées de même ordre et λ un scalaire.

1. $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
2. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
3. $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$.
4. $\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(B \times A)$.

Remarques 5.3

- En général, $\mathrm{tr}(A \times B) \neq \mathrm{tr}(A) \times \mathrm{tr}(B)$.
- L'application "trace" est donc une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(K)$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathscr{M}_n(K)$ dans K.
- Soient A une matrice de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$ et B une matrice de $\mathscr{M}_{p\times n}(K)$.
  La matrice AB est donc carrée d'ordre n, tandis que BA est carrée d'ordre p.
  On a aussi $\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(B \times A)$.
- On ne doit pas généraliser abusivement à des produits de plus de deux matrices.
  Par exemple, il n'y a aucune raison pour qu'on ait l'égalité $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CBA)$.
  En revanche, on peut écrire $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$.
- Deux matrices semblables ont la même trace.
  Plus précisément, si A et P appartiennent à $\mathscr{M}_n(K)$, et si P est inversible, alors la matrice B définie par $B = P^{-1}AP$ possède la même trace que A.
  En effet, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}(A)$.
  Pour reprendre la remarque précédente, on n'écrira pas : $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{tr}(A)$!

Démonstration

Soient $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j=1,n}$.
On pose ${}^tA = (\alpha_{ij})_{i,j=1,n}$ où $\alpha_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j = 1,p$.

1. On a $\alpha_{ii} = a_{ii}$.
2. $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1,n}$ $\quad \mathrm{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
3. $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ $\quad \mathrm{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \mathrm{tr}(A)$
4. Si $A \times B = (c_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $B \times A = (d_{ij})_{i=1,n\ j=1,m}$ où $d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}a_{lj}$
   $\mathrm{tr}(A \times B) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$ $\quad \mathrm{tr}(B \times A) = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{jl}a_{lj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{lj}b_{jl}$.

6. Matrices et bases

6.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 6.1

Soit E un K-espace vectoriel, de dim $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Soit $(v) = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Pour $i = 1,n$ et $j = 1, p$, soit a_{ij} la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur v_j dans la base (e) c'est-à-dire $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$.
Soit A la matrice de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$, de terme général a_{ij}.
A est appelée matrice de la famille (v) dans la base (e).

Remarques 6.2

- Dans un K-espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une base (e), on note parfois $[u]_e$ la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur u de E dans la base (e).
- Avec ces notations, la j-ième colonne de A est formée des composantes de v dans (e).
  Supposons par exemple que $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de E (donc $\dim(E) = 3$).
  Soient $v_1 = 3e_1 + 5e_2 + e_3$ et $v_2 = 2e_1 + 4e_2 + 7e_3$.
  C'est-à-dire $[v_1]_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $[v_2]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.
  Alors la matrice de la famille $(v) = (v_1, v_2)$ dans la base (e) est $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

6.2 Matrices associées à une application linéaire

Dans tout ce paragraphe, E et E' sont deux K-e.v. de dimension respective p et n, $(e) = (e_1,e_2,......,e_p)$ est une base de E et $(e') = (e'_1,e'_2,......,e'_n)$ est une base de E'.

Rappel 6.3

Soient f et g deux applications linéaires de E dans E'.
Si $\forall i = 1,p,\ f(e_i) = g(e_i)$ alors $f = g$.

Remarque 6.4

Cela signifie que f est entièrement déterminé par les images des vecteurs de la base.
C'est-à-dire la connaissance des $(f(e_i))_{i=1,p}$ suffit pour connaître f.

Démonstration

($\Rightarrow$) $f = g \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) = g(x)$. Entre autre vrai pour e_i pour tout entier i compris entre 1 et p.

($\Leftarrow$) $\forall x \in E,\ \exists!(x_i) \in K^p \ /\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$.

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i g(e_i) = g\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = g(x)$$

Définition 6.5

Soit $f \in \mathscr{L}_K(E,E')$.
On appelle matrice représentative ou matrice associée ou matrice image dans les bases (e) et (e') et on note $\mathscr{M}_{ee'}(f)$ la matrice $n \times p$ à coefficients dans K dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des images par f de chacun des e_i dans la base (e').

C'est-à-dire
$$\mathscr{M}_{ee'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix} \end{array} \qquad \text{où } f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i \quad \forall j = 1, p.$$

Remarque 6.6

La matrice de f dans les bases (e) et (e') est la matrice de la famille des vecteurs $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$ dans la base (e').

Exemple 6.7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$\qquad (x,y) \mapsto (x - y, -3x + 2y, 5x + y)$
On vérifie aisément que f est une application linéaire.
Soit (e) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit (e') la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a $\mathscr{M}_{ee'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 6.8

Soit $f \in \mathscr{L}_K(E,E')$ et soit $M = \mathscr{M}_{ee'}(f)$.
Si u a pour coordonnées U dans (e) alors $f(u)$ a pour coordonnées $M \times U$ dans (e').

Remarque 6.9

Ce que l'on peut aussi écrire $[f(u)]_{e'} = \mathscr{M}_{ee'}(f) \times [u]_e$.

Exemple 6.10

Soit (e) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit (e') la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$\qquad (x,y,z) \mapsto (y - z, 2x + 3y + 5z)$

On a $\mathscr{M}_{ee'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a $\mathscr{M}_{ee'}(f) \times U = \begin{pmatrix} y - z \\ 2x + 3y + 5z \end{pmatrix} = (y - z, 2x + 3y + 5z) = f(u)$.

Démonstration

M est une matrice $n \times p$ et X est une matrice $p \times 1$ donc MX est une matrice $n \times 1$.

$$M = \mathscr{M}_{ee'}(f) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix} \end{array} \quad \text{où } f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i \quad \forall j = 1, p.$$

$A \times X = (\gamma_i)_{i=1,n}$ où $\gamma_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} x_k$.

donc $f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_i\right) e'_i$ c'est-à-dire $y_i = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_i = \gamma_i$.

Propriété 6.11

L'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathscr{L}_K(E,E') \to \mathscr{M}_{np}(K) \\ f \mapsto \mathscr{M}_{ee'}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'e.v.

Remarques 6.12

- On a donc : $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$
  $\varphi(kf) = k\varphi(f)$
  φ bijective.
- On peut donc bien définir une application linéaire par sa matrice dans deux bases données.

Démonstration

- Soient $f,g \in \mathscr{L}_K(E,E')$ et $\lambda,\mu \in K$.

$$\mathscr{M}_{ee'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \quad \text{où } f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i \quad \forall j = 1,p.$$

$$\mathscr{M}_{ee'}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} g(e_1) & g(e_2) & \cdots & g(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \quad \text{où } g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e'_i \quad \forall j = 1,p.$$

On pose $h = \lambda f + \mu g$

$$\mathscr{M}_{ee'}(\lambda f + \mu g) = \mathscr{M}_{ee'}(h) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} h(e_1) & h(e_2) & \cdots & h(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \quad \text{où } h(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e'_i \quad \forall j = 1,p.$$

$\forall j = 1,p \quad (\lambda f + \mu g)(e_j) = \lambda f(e_j) + \mu g(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) e'_i$

Donc $\forall i = 1,n \ \ \forall j = 1,p \ \ c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$.

D'où $(c_{ij}))_{i=1,n\, j=1,p} = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{i=1,n\, j=1,p} = \lambda (a_{ij})_{i=1,n\, j=1,p} + \mu (b_{ij})_{i=1,n\, j=1,p}$

C'est-à-dire $\mathscr{M}_{ee'}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{M}_{ee'}(f) + \mu \mathscr{M}_{ee'}(g)$.

- Comme φ est linéaire, il suffit de vérifier que φ est injective.

$\mathscr{M}_{ee'}(f) = \mathscr{M}_{ee'}(g)$

$\Leftrightarrow \quad (f(e_{ij}))_{i=1,n\, j=1,p} = (g(e_{ij}))_{i=1,n\, j=1,p}$

$\Leftrightarrow \quad \forall i = 1,n \ \ \forall j = 1,p \quad f(e_{ij}) = g(e_{ij})$

$\Leftrightarrow \quad \forall j = 1,p \quad f(e_j) = g(e_j)$

$\Leftrightarrow \quad f = g$

Propriété 6.13

Soient E,F et G trois K-e.v. Soient (e), (e') et (e'') les bases respectives de E,F et G.
Soient $f \in \mathscr{L}_K(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}_K(F,G)$. On a $\mathscr{M}_{ee''}(g \text{ o } f) = \mathscr{M}_{e'e''}(g) \times \mathscr{M}_{ee'}(f)$

Démonstration

D'après la propriété 6.7, en posant $M = \mathscr{M}_{ee'}(f)$ et $M' = \mathscr{M}_{e'e''}(f)$.
Alors, si u a pour coordonnées U dans (e), $f(u)$ a pour coordonnées $M \times U$ dans (e').
Et $g(f(u))$ a pour coordonnées $M' \times (M \times U)$ dans (e'').
C'est-à-dire $(g \circ f)(u)$ a pour coordonnées $(M' \times M) \times U$ dans (e'').
D'après l'unicité de la matrice représentative, on a $\mathscr{M}_{ee''}(g \circ f) = M' \times M$.

Propriété 6.14

Soient E,F deux K-e.v. de même dimension. Soient (e) et (e') les bases respectives de E et F .
Soit $f \in \mathscr{L}_K(E,F)$.
f est inversible si et seulement si $\mathscr{M}_{ee'}(f)$ est inversible et $\mathscr{M}_{e'e}(f^{-1}) = (\mathscr{M}_{ee'}(f))^{-1}$.

Démonstration

$I_n = \mathscr{M}_{e'e''}(\mathrm{Id}) = \mathscr{M}_{e'e''}(f^{-1} \circ f) = \mathscr{M}_{e'e}(f^{-1}) \times \mathscr{M}_{ee'}(f)$.
$I_n = \mathscr{M}_{ee}(\mathrm{Id}) = \mathscr{M}_{ee}(f \circ f^{-1}) = \mathscr{M}_{ee'}(f) \times \mathscr{M}_{e'e}(f^{-1})$.

Propriété 6.15

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).
Soit v une famille de n vecteurs de E (autant donc que la dimension de E).
Soit A ($\in \mathscr{M}_n(K)$) la matrice de la famille (v) dans la base (e).
Alors la famille (v) est une base de E si et seulement si la matrice A est inversible.

Démonstration

A peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme f de E.
Or A inversible $\Leftrightarrow$ f inversible $\Leftrightarrow$ f bijective
$\Leftrightarrow$ f surjective (même dim)
$\Leftrightarrow$ (v) famille génératrice de E.
Or $\dim E = n$, donc (v) famille génératrice de E $\Leftrightarrow$ (v) base.

6.3 Matrice de passage

Définition 6.16

Soit E un K-e.v. de dimension n et soient (e) et (e') deux bases de E.
On appelle matrice de passage de (e) à (e') et on note $P_{e \to e'}$ la matrice formée des vecteurs colonnes correspondants aux coordonnées des vecteurs de (e') dans la base (e).
C'est-à-dire si $(e) = (e_1, e_2, ..., e_i, ... , e_n)$ et $(e') = (e'_1, e'_2, ..., e'_j, ... , e'_n)$
avec $e'_j = a_{1j}.e_1 + a_{2j}.e_2 + ... + a_{ij}.e_i + ... + a_{nj}.e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pour tout $j = 1,n$
alors on a $P_{e \to e'} = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$

Remarques 6.17

- La matrice de passage de (e) à (e') est la matrice de la famille (e') dans la base (e).
- La matrice de passage de (e) à (e') est $P_{e \to e'} = \mathscr{M}_{e'e}(\mathrm{Id}_E)$.

Propriété 6.18

Soit E un K-e.v. de dimension n.
Soient $(e) = (e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n)$ et $(e') = (e'_1, e'_2, \ldots\ldots, e'_n)$ deux bases de E.
Soit u un vecteur de E tel que $u = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \ldots + x_j.e_j + \ldots + x_n.e_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$

et $u = x'_1.e'_1 + x'_2.e'_2 + \ldots + x'_j.e'_j + \ldots + x'_n.e'_n = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k$

Soient $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

On a $X_e = P_{e \to e'} \times X_{e'}$.

Remarque 6.19

On peut aussi écrire $[u]_e = P_{e \to e'} \times [u]_{e'}$

Démonstration

On pose $P_{e \to e'} = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,n}$.
C'est-à-dire $e'_j = a_{1j}.e_1 + a_{2j}.e_2 + \ldots + a_{ij}.e_i + \ldots + a_{nj}.e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pour tout $i = 1,n$.

$$u = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k = \sum_{k=1}^{n} x'_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_k \right) e_i$$

On a donc $x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_k$ pour tout $j = 1,n$.

On vérifie aisément que cela correspond à $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Propriété 6.20

Soit E un K-e.v. de dimension finie.
Soient (e) et (e') deux bases de E.
La matrice de passage de (e) à (e') est inversible.
De plus, $(P_{e \to e'})^{-1} = P_{e' \to e}$.

Démonstration

D'après la propriété 6.13, une matrice de passage est inversible.
Pour tout vecteur, on a : $X_e = P_{e \to e'} \times X_{e'}$
$X_{e'} = P_{e' \to e} \times X_e$.
D'où $X_{e'} = (P_{e \to e'})^{-1} \times X_{e'}$ et $(P_{e \to e'})^{-1} = P_{e' \to e}$.

Remarque 6.21

Si (α), (β) et (γ) sont trois bases de E, alors on a la relation :
$P_{\alpha \to \gamma} = P_{\alpha \to \beta} P_{\beta \to \gamma}$.

Propriété 6.22

Soit (ε) une autre base de E et soit (ε′) une autre base de E'.
Soit P la matrice de passage de (e) à (ε) et soit Q la matrice de passage de (e') à (ε′).
Soit f une application linéaire de E dans E'.
Soit A la matrice de f dans les bases (e) et (e') et soit B la matrice de f dans les bases (ε) et (ε′).
Alors on a l'égalité : $B = Q^{-1} A P$.

Démonstration

Soit u un vecteur quelconque de E.
On a $[u]_e = P \times [u]_\varepsilon$ et $[f(u)]_{e'} = Q \times [f(u)]_{\varepsilon'}$.
De plus, $[f(u)]_{e'} = A \times [u]_e$. Donc $Q \times [f(u)]_{\varepsilon'} = A \times [u]_e = A \times P \times [u]_\varepsilon$. D'où $[f(u)]_{\varepsilon'} = Q^{-1} \times A \times P \times [u]_\varepsilon$.

Remarques 6.23

- Les matrices représentatives d'une même application linéaire sont équivalentes.
- Réciproquement, toute matrice équivalente à une matrice représentative d'une application linéaire est aussi une matrice représentative de cette application linéaire.

Corollaire 6.24

Si f est un endomorphisme de E, de matrice A dans (e) et de matrice B dans (ε).
Soit P la matrice de passage de (e) à (ε). Alors on a l'égalité : $B = P^{-1} A P$.

Définition 6.25

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E.
On appelle trace de f et on note tr(f) la trace de la matrice de f dans une base quelconque de l'espace vectoriel E.

Remarques 6.26

- Puisque $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}(A)$, la trace de f ne dépend pas de la base (e) choisie dans E pour représenter matriciellement f.
- Si f et g sont deux endomorphismes de E, on a : $\mathrm{tr}(g \circ f) = \mathrm{tr}(f \circ g)$.
- Si p est une projection vectorielle de E sur un sous-espace F de dimension r, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = r$.
  Pour s'en persuader, il suffit de choisir un supplémentaire G de F dans E et de se placer dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. La matrice de p dans cette base est diagonale, les r premiers coefficients diagonaux valant 1 et les $n - r$ derniers valant 0.

6.4 Rang

Définition 6.27

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$.
On appelle rang de A, et on note rg(A), le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A, considérés comme éléments de K^n.

Remarques 6.28

- rg(A) est nul $\Leftrightarrow$ A est la matrice nulle.
- rg(A) est égal à 1 si et seulement si les différentes colonnes de A sont proportionnelles deux à deux, l'une d'elles au moins n'étant pas nulle.
- Le rang de la matrice A est égal au rang de toute application linéaire susceptible d'être représentée par A.

Propriété 6.29

Le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille composée de ses vecteurs lignes.

Démonstration

Non trivial (euphémisme).

Propriété 6.30

Soit $f \in \mathscr{L}_K(E,E')$ et soit $M = \mathscr{M}_{ee'}(f)$.
On a rg(f) (= dim Im f) = rg($\mathscr{M}_{ee'}(f)$).

Démonstration

$\mathrm{Im} f = < (f(e_1), f(e_2), \ldots f(e_n))>$.

Corollaire 6.31

Deux matrices semblables ont même rang.

Corollaire 6.32

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$. A est inversible si et seulement si rg(A) = n.

7. Opérations élémentaires

Définition 7.1

Soit $A = (a_{ij})_{i=1,n\ j=1,p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n \times p}(K)$.
On note $L_1, \ldots, L_n$ les lignes successives de A.
Pour chaque ligne L_i de A, soit $d(i)$ le plus petit indice j, s'il existe, tel que $a_{ij} \neq 0$.
On dit que A est échelonnée supérieurement s'il existe un entier r de $\{0, \ldots, n\}$ tel que :

- Pour tout indice i inférieur ou égal à r, la ligne L_i est non nulle.
- Pour tout indice i strictement supérieur à r, la ligne L_i est nulle.
- La suite $d(1), d(2), \ldots, d(r)$ est strictement croissante.

Les r coefficients non nuls situés aux positions $(i, d(i))$ sont appelés les pivots de A.

Remarque 7.2

Une rang d'une telle matrice est r.

Exemple 7.3

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée, avec quatre pivots.

Donc $\mathrm{rg}(A) = 4$.

Définition 7.4

Soient n, p, r trois entiers tels que $1 \leq r \leq \min(n, p)$.
On note $J_r(n, p)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$, de coefficients a_{ij} définie par :

- Pour tout indice i compris entre 1 et r, $a_{ii} = 1$.
- Les autres coefficients de $J_r(n, p)$ sont nuls.

Exemples 7.5

Les matrices $J_r(n, p)$ sont bien sûr des cas particuliers de matrices échelonnées.

Par exemple, dans $\mathscr{M}_{4,\,5}(K)$, $J_2(4,5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J_3(4,5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété 7.6

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $J_r(n, p)$.

Propriété 7.7

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Rappel 7.8

Le rang d'une matrice A est égal au rang de la matrice transposée ${}^tA$.

Remarque 7.9

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$.
Le rang de A est inférieur ou égal au minimum de n et de p.
Il est égal au nombre maximum de colonnes libres dans A.
Il est aussi égal au nombre maximum de lignes libres dans A.

Définition 7.10

Soit $(v) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de K^p.
On appelle opération élémentaire sur les vecteurs de cette famille l'une des opérations suivantes :

- Multiplier un des vecteurs de la famille par un scalaire non nul.
- Ajouter à l'un des vecteurs un multiple d'un autre vecteur de la famille.
- Echanger deux vecteurs de la famille.

Propriété 7.11

Soit (v') la famille de vecteurs obtenue en appliquant une opération élémentaire à une famille (v).
Les deux familles (v) et (v') ont le même rang.

Remarque 7.12

On ne modifie donc pas le rang d'une famille de vecteurs en lui appliquant une succession d'opérations élémentaires. Il en est ainsi quand on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Définition 7.13

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$. Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de A.
On appelle opération élémentaire sur les lignes de A l'une des opérations suivantes :

- Multiplier une ligne L_i par un scalaire non nul α.
  On note cette opération : $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- Ajouter à l'une des lignes L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
  On note cette opération : $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.
- Echanger deux lignes L_i et L_j.
  Cette opération est notée : $L_i \leftrightarrow L_j$.

Remarques 7.14

- On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice A.
  Ces opérations sont notées :
  $C_i \leftarrow \alpha C_i$,
  $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$
  et $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Toute opération élémentaire (ou toute suite d'opérations élémentaires) transforme une matrice A en une matrice de même rang.
- Dans toute opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$, il est absolument indispensable que α soit non nul.
  On veillera notamment au cas où α dépend d'un paramètre. Pour les valeurs de celui-ci qui annuleraient α, l'opération se traduit par $L_i \leftarrow 0$ et modifie en général le rang de A.
- On note $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ la composée de $L_i \leftarrow \alpha L_i$ puis de $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.

Propriété 7.15

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n\times p}(K)$, transformée en une matrice B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Alors il existe une matrice inversible P telle que $B = PA$.
De même si C est obtenue à partir de A par une ou plusieurs opérations élémentaires sur les colonnes, alors il existe une matrice inversible Q telle que $B = AQ$.

Remarques 7.16

On peut interpréter ces résultats en disant que :

- Toute opération élémentaire sur les lignes équivaut à une multiplication à gauche par une matrice inversible.
- Toute opération élémentaire sur les colonnes équivaut à une multiplication à droite par une matrice inversible.

Propriété 7.17

On peut transformer une matrice quelconque A en une matrice échelonnée B, par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de A.

Remarques 7.18

- Le calcul du rang d'une famille de vecteurs (ou d'une application linéaire) peut toujours se ramener au calcul du rang d'une matrice.
- Les opérations élémentaires ne modifiant pas le rang de la matrice initiale, on peut ainsi calculer le rang de A : c'est celui de la matrice échelonnée finale, c'est-à-dire le nombre de ses pivots non nuls.

Exemple 7.19

On veut calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On applique à A les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

On obtient la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 6 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

On applique à B les opérations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$
$L_2 \leftrightarrow L_3$

On obtient la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 41 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

La matrice initiale A est donc de rang 4.

Définition 7.20

On appelle matrice par blocs toute matrice découpée en un certain nombre de sous-matrices.
Chacune de ces sous-matrices est appelée un bloc.

Propriété 7.21

Les règles des opérations d'addition, de multiplication de matrice sont applicables sur les blocs de la même façon que sur les coefficients.

8. Systèmes d'équations linéaires

Définition 8.1

On appelle système d'équations linéaires un système du type : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ (1)

où les a_{ij} et les b_j sont des éléments d'un corps K et les x_i des inconnues.

Propriété 8.2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

- Le système (1) correspond à l'équation $AX = B$.
- Le système (1) possède une unique solution si et seulement si $n = p$ et A est inversible.
  Dans ce cas, l'équation $AX = B$ est alors équivalente à $X = A^{-1}B$.

Méthode de Gauss

Elle correspond à la méthode dite "par combinaisons".

Soit le système : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ correspondant à une certaine équation $AX = B$.

Si tous les a_{i1} sont nuls, alors les x_1 n'interviennent pas et on passe à la deuxième colonne. Si l'un des a_{i1} est non nul, en échangeant les lignes, on peut supposer qu'il s'agit de a_{11}, on remplace alors toutes les lignes L_i par $a_{11}L_i$ - $a_{i1}L_1$ pour $2 \leq i \leq n$. En pratique, s'il existe plusieurs coefficients a_{i1} ($1 \leq i \leq n$) non nuls, on échange les lignes de façon à mettre en première ligne celle du coefficient le plus "simple".

On obtient donc un nouveau système équivalent : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ \qquad a'_{n2}x_2 + ... + a_{np}x'_p = b'_n \end{cases}$

On s'intéresse maintenant aux $(n - 1)$ dernières lignes comme précédemment. On considère ces lignes comme si elles étaient indépendantes.

Si tous les a_{i2} pour $i \geq 2$ sont nuls, alors les x_2 n'interviennent pas et on passe à la colonne suivante. Si l'un des a_{i2} est non nul, en échangeant les lignes, on peut supposer qu'il s'agit de a_{22}, on remplace alors toutes les lignes L_i par $a_{22}L_i$ - $a_{i2}L_2$ pour $3 \leq i \leq n$.

On réitère ces opérations jusqu'à ce que l'on obtienne un système un système triangulaire.
Suivant les valeurs de p de n et du rang de la matrice A, on obtient différent résultats.

Par exemple, si $n = p$ et si $\mathrm{rg}(A) = p$ on obtient un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1p-1}x_{p-1} + a_{1p}x_p = c_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2p-1}x_{p-1} + a_{2p}x_p = c_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3p-1}x_{p-1} + a_{3p}x_p = c_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{p-1p-1}x_{p-1} + a_{p-1p}x_p = c_{p-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{pp}x_p = c_p \end{cases}$$

Et donc une unique solution que l'on obtient en remplaçant de façon récursive les différentes valeurs des x_i pour i de p à 1.

Exemples 8.3

1. $$\begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ 3x - 2y + 4z - t = 1 \\ x - y + z + t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ 4y - 2z + 5t = 7 \\ y - z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ y - z + 3t = 1 \\ 4y - 2z + 5t = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z + 2t = 2 \\ y - z + 3t = 1 \\ 2z - 7t = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}t \\ y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \\ x = -4t \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 5y + 3z = 5 \\ 5y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}z \\ y = -\frac{3}{5}z + 1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 5y + 3z = 5 \\ 5y + 3z = 7 \end{cases}$$