

Chapitre 8 : Primitives

F. Wlazinski

23rd December 2003

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} ou \mathbb{R} tout entier et f est un élément de $\mathcal{C}^0(I)$.

Définition 1

On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable sur I dont la dérivée est f .

Remarques 2

• On utilise la notation $\int f(t) dt$ pour désigner une primitive quelconque de f .

Par exemple : $\int \cos(t) dt = \sin x$ ou $\int \cos(t) dt = 5 + \sin x$ sont deux expressions correctes malgré l'abus du fait que $\sin x$ est un réel est non pas une fonction.

• Avec les notions liées à l'intégration, on obtient que $\int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en $a \in I$.

Par exemple : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^x \cos(t) dt = 1 + \sin x$.

Propriété 3

Si F est une primitive de f alors toutes les primitives de f sont de la forme $F + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Soient F et G deux primitives de f .

On a $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Donc $G - F = cste = c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow G = F + c$. \square

Exemple 4

Soit $p \geq 2$, les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^p = \sum_{k=0}^p x^k$ sont

les fonctions $F + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ où $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{p+1}}{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{x^k}{k}$.

Ce que l'on peut noter aussi $\int f(t) dt = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{x^k}{k} + cste$.

Propriété 5

Soient $u, v \in \mathcal{C}^0(I)$. On a $\int u(t)v'(t) dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) dt$

Démonstration

Ce n'est qu'une lecture réciproque de la formule : $(fg)' = f'g + fg'$. \square

Exemple 6

On cherche à déterminer $\int \ln t dt$ sur $]0; +\infty[$.

On pose $u(t) = \ln(t)$ $v'(t) = 1$

$$u'(t) = \frac{1}{t} \quad v(t) = t$$

D'où $\int \ln t dt = t \ln t - \int 1 dt = t \ln t - t + cste$.

Propriété 7

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$ telle que $\varphi(J) \subset I$ et soit F une primitive de f .

On a $\int \varphi'(t)f(\varphi(t)) dt = F(\varphi(t))$.

Démonstration

Ce n'est qu'une lecture réciproque de la formule : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. \square

Exemple 8

• On a $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

• On cherche à calculer $\int \frac{3x}{x^2+1} dx$.

On a $\frac{3x}{x^2+1} = \frac{3}{2} \times 2x \times \frac{1}{x^2+1}$. Donc $\int \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+1| = \frac{3}{2} \ln(x^2+1)$.

Remarque 9

On utilise aussi cette méthode du changement de variable de la façon suivante :

Soit u une fonction qui vérifie :

- u est continue sur I .
- u est strictement monotone sur I .
- u est dérivable sur I et sa dérivée ne s'annule pas sur I .
- $u(I) = J$
- u admet une fonction réciproque $u^{-1} = v$.

On a que, si G est une primitive de $v'(f \circ v)$, alors $F = G \circ u$ est une primitive de f .

Exemple 10

On cherche à déterminer $\int \frac{t^2}{3\sqrt[3]{1+t}} dt$ sur $I =]-1; +\infty[$.

On a $f(t) = \frac{t^2}{3\sqrt[3]{1+t}}$ et on pose $u(t) = \sqrt[3]{1+t}$.

On a u continue sur \mathbb{R} , strictement croissante sur \mathbb{R} .

u est dérivable sur I et $\forall t \in J$, $u'(t) > 0$ donc $\neq 0$.

$J = u(I) =]0; +\infty[$.

$y = \sqrt[3]{1+x} \Leftrightarrow x = y^3 - 1$ c'est-à-dire $v(t) = t^3 - 1$ et $v'(t) = 3t^2$.

$v'(t) \times (f \circ v)(t) = 3t^2 \times \frac{(t^3-1)^2}{3t} = t(t^3-1)^2 = t^7 - 2t^4 + t$.

$\int t^7 - 2t^4 + t dt = \frac{1}{8}t^8 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^2$ sur J .

Donc $\int \frac{t^2}{3\sqrt[3]{1+t}} dt = \frac{1}{8}(\sqrt[3]{1+t})^8 - \frac{2}{5}(\sqrt[3]{1+t})^5 + \frac{1}{2}(\sqrt[3]{1+t})^2$.