

Chapitre 1 : Propriétés des réels

F. Wlazinski

27th October 2003

1 Préliminaires

Rappel

\mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels c'est-à-dire $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$.

\mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs c'est-à-dire $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

\mathbb{Q} est l'ensemble des rationnels c'est-à-dire les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers relatifs. On a $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\}$ ou encore $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \text{ et } \exists b \in \mathbb{Z}^* / x = \frac{a}{b}$.

Remarques 1.1

- $\frac{\pi}{4}$ n'est pas un rationnel.
- L'écriture décimale d'un rationnel est la suite de termes obtenue si l'on effectuait la division.
- Il existe aussi l'ensemble des décimaux noté \mathbb{D} qui est l'ensemble des rationnels dont le dénominateur est une puissance entière de 10.

Propriété 1.2

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ admet une écriture décimale finie ou infinie périodique.

Remarque 1.3

Le reste de la division euclidienne par un entier non nul p est compris entre 0 et $p - 1$.

Exemples 1.4

- On utilise la notation $x = 0, \overline{527}$ pour exprimer le fait que 527 se répète à l'infini. Pour retrouver une écriture fractionnaire de x , on peut utiliser le raisonnement suivant :

Puisque $x = 0, 527527527\dots$, on a $1000x = 527, 527527527\dots$

D'où $999x = 527$ et donc $x = \frac{527}{999}$.

- Soit $x = \frac{62}{55}$. Si l'on effectue la division, on obtient $x = 1, 1272727$. On a $x = 1, \overline{127}$

Remarques 1.5

- $3 \times 0, \overline{33} = 0, \overline{99}$???
- Problèmes n'ayant pas de solution dans les ensembles précédents :
 - Par combien doit-on multiplier la longueur du côté d'un carré si l'on veut que sa surface soit multiplier par 2?
 - Constructibilité à la règle et au compas.
 - Quadrature du cercle.

D'où la création de \mathbb{R} .

- $\mathbb{R} = \{\text{rationnels}\} \cup \{\text{irrationnels}\}$.
- Exemples d'irrationnels : $\sqrt{2}, e, \pi \dots$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2 Propriétés structurelles de

Propriétés 2.1

Structure de corps commutatif sur \mathbb{R} .

1. La loi $+$ est une loi de composition interne sur \mathbb{R} : si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $x + y \in \mathbb{R}$.
2. La loi $+$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. La loi $+$ admet un élément neutre (unique) : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$.
4. Tout élément de \mathbb{R} admet un symétrique (unique) pour la loi $+$:
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} / x + x' = x' + x = 0$.
 Ce symétrique est appelé opposé et est noté $-x$.
 On définit la soustraction par $x - y = x + (-y)$.
5. La loi $+$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.
6. La loi \times est une loi de composition interne sur \mathbb{R} : si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $x \times y \in \mathbb{R}$.
7. La loi \times est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.
8. La loi \times admet un élément neutre (unique) : $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x$.
9. La loi \times est distributive à gauche (et à droite voir TD) par rapport à la loi $+$:
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.
10. Tout élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ admet un symétrique (unique) pour la loi \times :
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} / x \times x' = x' \times x = 1$.
 Ce symétrique est appelé inverse et est noté x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.
 On définit la division par $x \div y = x \times \frac{1}{y}$.
11. La loi \times est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x$.

Propriétés 2.2

Relation d'égalité compatible avec la structure de corps de \mathbb{R} .

1. La relation $=$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}, x = x$.
2. La relation $=$ est symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R},$ si $x = y$ alors $y = x$.
3. La relation $=$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},$ si $x = y$ et si $y = z$ alors $x = z$.
4. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R},$ si $x_1 = y_1$ et si $x_2 = y_2$ alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.
5. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R},$ si $x_1 = y_1$ et si $x_2 = y_2$ alors $x_1 \times x_2 = y_1 \times y_2$.

Remarque 2.3

Les réciproques des deux dernières propriétés sont fausses.
 En effet, $2 + 3 = 1 + 4$ et $3 \times 0 = 2 \times 0$.

Propriétés 2.4

Relation d'ordre compatible avec la structure de corps de \mathbb{R} .

1. La relation \leq est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$.
2. La relation \leq est antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et si $y \leq x$ alors $x = y$.
3. La relation \leq est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et si $y \leq z$ alors $x \leq z$.
4. La relation \leq est une relation d'ordre totale : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, au moins l'une des deux expressions $x \leq y$ ou $y \leq x$ est vérifiée.
5. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1 \leq y_1$ et si $x_2 \leq y_2$ alors $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $0 \leq x$ et si $0 \leq y$ alors $0 \leq x \times y$.

Remarques 2.5

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on définit \geq par : $x \geq y$ si et seulement si $y \leq x$.
- La relation \geq est aussi une relation d'ordre totale compatible avec la structure de corps de \mathbb{R} .
- Lorsqu'un réel x vérifie $x \leq 0$ (resp. $x \geq 0$), on dit qu'il est négatif (resp. positif).
- Attention : Si $x_1 \leq y_1$ et si $x_2 \leq y_2$ alors on n'a pas forcément $x_1 \times x_2 \leq y_1 \times y_2$.
Par exemple : $-4 \leq -1$ et $-3 \leq -2$ mais $(-4) \times (-3) \geq (-1) \times (-2)$.
- $x < y$ signifie $x \leq y$ et $x \neq y$. De même, $x > y$ signifie $x \geq y$ et $x \neq y$.

(ENTAMER SI POSSIBLE LA FEUILLE DE TD A CE NIVEAU OU SIGNALER L'UTILISATION DE FORMULES DEMONTREES EN TD)

(OU PRECISER EXERCICES 1 à 5 SE RAPPORTENT A CE QUI PRECEDE ET IL EXISTE D'AUTRES FORMULES)

3 Encadrement

On va étendre ici les propriétés de base des relations \leq et \geq .

Dans cette partie, a, b, c et d sont des réels.

Définition 3.1

On dit que b est compris entre a et c et on note $a \leq b \leq c$ pour exprimer que b vérifie les deux relations $a \leq b$ et $b \leq c$.

Remarque 3.2

On dit aussi que b est strictement compris entre a et c (noté $a < b < c$) pour exprimer que b vérifie les deux relations $a < b$ et $b < c$.

Propriété 3.3

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq a \times c \leq b \times d$

Démonstration

Si $0 \leq a \leq b$ et puisque $0 \leq c$, on a donc $0 \leq a \times c \leq b \times c$.

Si $0 \leq c \leq d$ et puisque $0 \leq b$, on a donc $0 \leq b \times c \leq b \times d$.

On obtient le résultat par transitivité. \square

Remarques 3.4

- Rappel : si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors nous n'avons pas forcément $a \times c \leq b \times d$. Par exemple, $1 \leq 3$ et $-2 \leq -1$ et pourtant $-2 \geq -3$.
- On étend sans difficultés le résultat précédent à 2×3 éléments, 2×4 éléments ou plus :
Si $0 \leq a \leq b \leq c$ et $0 \leq d \leq e \leq f$ alors $0 \leq a \times d \leq b \times e \leq c \times f$.

Propriétés 3.5

Si $0 < a$ alors $0 < \frac{1}{a}$.

Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Remarque 3.6

On a $-1 \leq 1$ et $\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{1}$.

Démonstration

• Si $a \neq 0$ alors $\frac{1}{a}$ existe et nous savons que $\left(\frac{1}{a}\right)^2 > 0$.

$a > 0$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^2 \Rightarrow a \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$.

• On a $a > 0$ et $b > 0$ donc $\frac{1}{a} > 0$ et $\frac{1}{b} > 0$.

Donc $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} > 0$.

$0 < a \leq b$ et $\frac{1}{ab} > 0 \Rightarrow 0 \times \frac{1}{ab} < a \times \frac{1}{ab} \leq b \times \frac{1}{ab}$.

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. \square

Remarque 3.7

On étend sans difficultés le résultat précédent à 3 éléments, 4 éléments ou plus :

Si $0 < a \leq b \leq c$, alors $0 < \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Exemple 3.8

Sachant que $5 \leq x \leq 10$ et que $1 \leq y \leq 2$, encadrer $\frac{x}{y}$.

On va utiliser les deux propositions précédentes.

$1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$.

De $5 \leq x \leq 10$ et $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, on obtient $0 < 5 \times \frac{1}{2} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 10 \times 1$. C'est-à-dire $0 < \frac{5}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 10$.

Propriété 3.9

On a : $0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq a^2 \leq b^2$

Démonstration

Il suffit d'écrire deux fois $0 \leq a \leq b$ et utiliser la propriété 3.3. \square

Remarques 3.10

• Attention Danger 1 : $a \leq b \not\Rightarrow a^2 \leq b^2$.

Par exemple : $-3 \leq -1$ mais $(-3)^2 \geq (-1)^2$.

• Attention Danger 2 : $0 \leq a^2 \leq b^2 \not\Rightarrow 0 \leq a \leq b$.

Par exemple : $0 \leq (-3)^2 \leq (-4)^2$ mais $0 \geq -3 \geq -4$.

On peut donc se demander sous quelles conditions l'équivalence a lieu.

Corollaire 3.11

Si a et b sont positifs alors on a : $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.

Si a et b sont négatifs alors on a : $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$.

Démonstration

Si $a \leq b \leq 0$ alors $0 \leq -b \leq -a$ et donc $0 \leq (-b)^2 \leq (-a)^2$. \square

Remarque 3.12

On peut étendre cette propriété à 3 réels ou plus.

Si a, b et c sont positifs alors on a $a \leq b \leq c \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \leq c^2$.

Si a, b et c sont négatifs alors on a $a \leq b \leq c \Leftrightarrow a^2 \geq b^2 \geq c^2$.

Exemples 3.13

- On cherche à encadrer x^2 sachant que $-3 \leq x \leq -2$.
Réponse : $4 \leq x^2 \leq 9$.
- On cherche à encadrer x^2 sachant que $-3 \leq x \leq 2$.
Réponse : $-3 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0$ ou $0 \leq x \leq 2$.
 $\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$ ou $0 \leq x^2 \leq 4$.
 $\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$.
- On cherche à résoudre $\sqrt{x+3} \geq 2$ sur $[-3; +\infty[$.
Réponse : $\sqrt{x+3} \geq 2 \Rightarrow x+3 \geq 4 \Rightarrow x \geq 1$. D'où $\mathcal{S} = [1; +\infty[$.

Propriété 3.14

On a : $a \leq b \Leftrightarrow a^3 \leq b^3$.

Démonstration

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b) \left(\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right).$$

$$\text{On a } \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\text{D'où } a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0 \Leftrightarrow (a - b) \left(\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right) \leq 0.$$

$$\text{Donc } a \leq b \Leftrightarrow a^3 - b^3 \leq 0 \Leftrightarrow a^3 \leq b^3. \quad \square$$

Remarque 3.15

Si n est pair, a^n et b^n se comportent comme a^2 et b^2 .

Si n est impair, a^n et b^n se comportent comme a^3 et b^3 .

Propriété 3.16

On suppose $a, b > 0$.

Il existe un entier non nul n tel que $na > b$. On dit que \mathbb{R} est archimédien.

Définition 3.17

Soit x un réel. Il existe un et un seul entier relatif x_0 tel que $x_0 \leq x < x_0 + 1$.

Cet entier x_0 est appelé partie entière de x et est noté $E(x)$.

Exemples 3.18

$$E\left(\frac{27}{12}\right) = 2 \text{ et } E(-\pi) = -4.$$

Remarque 3.19

Pour tout réel x , on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$ mais aussi $x - 1 < E(x) \leq x$

4 Valeur absolue

4.1 Propriétés

Définition 4.1

Soit x un réel.

On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel $\max\{-x; x\}$.

C'est-à-dire $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

Remarque 4.2

$\forall x \in \mathbb{R}$, nous avons les propriétés élémentaires suivantes :

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x^2 = |x|^2$

Propriété 4.3

Compatibilité de la valeur absolue avec la multiplication et l'inverse.

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a \times b| = |a| \times |b|$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^*, |a^{-1}| = \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|a|} = |a|^{-1}$.

Remarques 4.4

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall p \in \mathbb{Z}, |x^p| = |x|^p$
(Démonstration par récurrence pour $p \geq 0$ et $x^p = (x^{-1})^{-p}$ pour $p < 0$).
- En général, on n'a pas la compatibilité avec l'addition. C'est-à-dire : $|a + b| \neq |a| + |b|$.
Par exemple, $|-6 + 2| = 4$ et $|-6| + |2| = 6 + 2 = 8$.

Propriété 4.5

$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$. Cette relation est appelée l'inégalité triangulaire.

Remarque 4.6

On peut généraliser cette relation à un nombre $n \geq 3$ de termes :

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

4.2 Valeur absolue et relations

Propriété 4.7

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \geq 0, |x| = m \Leftrightarrow x = -m \text{ ou } x = m$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| = |y| \Leftrightarrow x = -y \text{ ou } x = y$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \geq 0, |x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \geq 0, |x| \geq m \Leftrightarrow x \leq -m \text{ ou } x \geq m$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq |y| \Leftrightarrow |x|^2 \leq |y|^2 \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.

Remarque 4.8

En pratique, il faut faire attention au fait que, dans $|x| = m$, on doit avoir m positif.

Exemples 4.9

- $|2x - 3| = |x| \Leftrightarrow 2x - 3 = -x$ ou $2x - 3 = x \Leftrightarrow 3x = 3$ ou $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$.
- $|2x - 3| = |x| \Leftrightarrow |2x - 3|^2 = |x|^2 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = x^2 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(3x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$

$$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4 = 2^2$$
$$x_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

- $|x + 3| \leq |2x - 1| \Leftrightarrow (x + 3)^2 \leq (2x - 1)^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - (x + 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3x + 2)(x - 4) \geq 0$
 $(3x + 2)(x - 4)$ est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-\frac{2}{3}$ et 4.

Le coefficient du terme en x^2 est positif.

Donc on doit avoir $x \leq -\frac{2}{3}$ ou $x \geq 4$.

Propriété 4.10

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Démonstration

$$x = x - y + y \Rightarrow |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$
$$y = y - x + x \Rightarrow |y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y|$$

Or $||x| - |y|| = \sup(|x| - |y|; |y| - |x|)$. D'où le résultat. \square

Définition 4.11

Soient a, b, x trois réels.

Si $a \leq x \leq b$, on dit que l'on a un encadrement de x . L'amplitude de l'encadrement est $\varepsilon = b - a$.

On dit que a est une valeur approchée de x à ε près par défaut.

On dit que b est une valeur approchée de x à ε près par excès.

Exemple 4.12

$$1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42.$$

1,41 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,01 près par défaut.

1,42 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,01 près par excès.

Remarque 4.13

Pour tous réels x et y , $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y et elle est généralement notée $d(x, y)$.

Par exemple (placer les points -2 et 3 sur une droite graduée), si $x = -2$ et $y = 3$, $d(x, y) = |-2 - 3| = |-5| = 5$.

Définition 4.14

Soient a et x deux réels:

On dit que a est une valeur approchée de x à $\varepsilon > 0$ près si et seulement si $|x - a| \leq \varepsilon$

($\Leftrightarrow d(x, a) \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$).

5 Divers

Rappel

Soient a et b deux réels tels que $a < b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Propriété 5.1

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Il existe un unique $b \in \mathbb{R}_+$ tel que $b^n = a$.

b est appelé la racine $n^{\text{ième}}$ de a et est notée $\sqrt[n]{a}$ ou \sqrt{a} lorsque $n = 2$.