Chapitre 2 : Rappel sur les nombres complexes

F. Wlazinski

18th November 2003

1 Introduction

Remarque 1.1

L'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ a été introduit, entre autre, pour résoudre les équations de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Dans un premier temps, on a utilisé la notation $\sqrt{-1}$ pour l'une des deux solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Mais cette notation a montré ses limites. D'où l'introduction du terme i qui vérifie $i^2 = -1$. Il existe plusieurs méthodes pour construire l'ensemble $\mathbb{C}$. Une des plus classiques est celle qui suit. Toutefois, dans ce cours, on va plus s'intéresser aux propriétés du corps des complexes que de sa construction. Celle-ci est donc donnée à titre indicatif et permet de justifier ce qui suivra. Il est aussi à signaler que les propriétés et les remarques de cette section seront à connaître car elles serviront régulièrement.

Construction de $\mathbb{C}$

On travaille sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où l'on définit deux lois $+$ et $\times$ de la façon suivante:
$\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$ et $(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.
(Faire attention car certains $+$ et $-$ sont ceux de $\mathbb{R}$).

$\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois possède une structure de corps commutatif c'est-à-dire vérifie les onze propriétés suivantes : (Par soucis de clarté et à fin de réutilisation car on pourra bientôt lire $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}^2$, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont notés z à la place de (x,y).

1. La loi $+$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$: si $z_1 \in \mathbb{R}^2$ et $z_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}^2$.
2. La loi $+$ est associative : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
3. La loi $+$ admet un élément neutre (unique) : $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + (0,0) = (0,0) + z_1 = z_1$.
4. Tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique (unique) pour la loi $+$: $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, z_1' \in \mathbb{R}^2 \,/\, z_1 + z_1' = z_1' + z_1 = (0,0)$. Ce symétrique est appelé opposé et est noté $-z_1$.
5. La loi $+$ est commutative : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
6. La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$: si $z_1 \in \mathbb{R}^2$ et $z_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $z_1 \times z_2 \in \mathbb{R}^2$
7. La loi $\times$ est associative : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$.
8. La loi $\times$ admet un élément neutre (unique) : $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (1,0) = (1,0) \times z_1 = z_1$.
9. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ et $(z_1 + z_2) \times z_3 = z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3$.
10. Tout élément de $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ admet un symétrique (unique) pour la loi $\times$: $\forall z_1 \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, z_1' \in \mathbb{R}^2 \,/\, z_1 \times z_1' = z_1' \times z_1 = 1$. Ce symétrique est appelé inverse et est noté z_1^{-1} ou $\frac{1}{z_1}$.
11. La loi $\times$ est commutative : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$.

Remarques 1.2

- On a : $(0,1) \times (0,1) = (-1,0)$.
- On peut identifier les réels x de $\mathbb{R}$ aux éléments $(x,0)$ de $\mathbb{R}^2$. On vérifie rapidement que $(x,0) + (y,0) = (x+y,0)$ et que $(x,0) \times (y,0) = (x \times y, 0)$. Les lois $+$ et $\times$ que l'on vient de définir sur $\mathbb{R}^2$ peuvent donc être considérer comme des extensions de celles que l'on connaissait sur $\mathbb{R}$. On va donc, de la même façon que dans $\mathbb{R}$, noter $z_1 \times z_2$ par $z_1.z_2$ ou encore $z_1 z_2$.
- On note i l'élément $(0,1)$. On a, d'après le premier point de la remarque, $i^2 = i \times i = -1$.
- Pour tout réel a et tout couple de réels (x,y), on a : $a(x,y) = (a,0)(x,y) = (ax,ay)$ et $a + (x,y) = (a,0) + (x,y) = (a+x,y)$.
- Pour tout couple de réels (a,b), on a : $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + b(0,1) = a + bi = a + ib$.

S'il n'y avait pas la construction précédente et en simplifiant un peu les choses, on pourrait utiliser comme définition des complexes la suivante :

Définition 1.3

Soit i un terme qui vérifie $i^2 = -1$. L'ensemble des éléments de la forme $a + ib$ où a et b sont des réels est appelé ensemble des nombres complexes et est noté $\mathbb{C}$.

Remarques 1.4

- On a donc $\mathbb{C} = \{a + ib \text{ où } a, b \in \mathbb{R}\}$ et $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R} \,/\, z = x + iy$.
- On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x + i0$ et donc $x \in \mathbb{C}$.
- Un complexe de la forme ib où $b \in \mathbb{R}$ est appelé un imaginaire pur.

Définition 1.5

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.
Les lois $+$ et $\times$ sont définies par : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Remarques 1.6

- En utilisant les règles classiques de la distribution, on a : $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + aib' + iba' + ibib'$ et l'on retrouve la même définition pour la multiplication que dans la construction de $\mathbb{C}$.
- Les identités remarquables et la formule du binôme de Newton restent valables.
- L'inverse d'un complexe $z = a + ib$ est $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$ (on vérifie facilement que $z \times z^{-1} = 1$).

2 Conjugués et modules

Propriétés 2.1

Soient a, b, c, d des réels.
$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

Démonstration

- On suppose que $a + ib = 0$. Si b était non nul, on aurait $i = -\frac{a}{b}$ et donc i serait réel : absurde. D'où $b = 0$ et donc $a = 0$.
- On suppose $a + ib = c + id$. On a $(a - c) + i(b - d) = 0$. D'après le premier point, $a - c = 0$ et $b - d = 0$. D'où le résultat. $\square$

Remarques 2.2

- L'écriture $z = a + ib$ d'un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$ est donc unique et est appelée forme algébrique de z.

• Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le réel a est appelé la partie réel du complexe z et est noté $Re(z)$. Le réel b est appelé la partie imaginaire du complexe z et est noté $Im(z)$.
• Attention : $z = a + ib$ sans autre indication ne signifie ni que $a = Re(z)$ ni que $b = Im(z)$. Contre exemple : $z = (1 + i) + i(1 - i)$.
• Pour tout complexe z, on a $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = Re(z)$ et z imaginaire pur $\Leftrightarrow z = Im(z)$.

Définition 2.3

Soit $z = a+ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le complexe $a - ib$.

Remarque 2.4

$2Re(z) = z + \overline{z}$ et $2Im(z) = z - \overline{z}$

Propriétés 2.5

Soient z et z' deux nombres complexes, et $\overline{z}$ et $\overline{z'}$ leurs conjugués respectifs. On a :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \qquad \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$$

On dit que $z \mapsto \overline{z}$ est un morphisme d'anneau.

Démonstration

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on a $\overline{z} = a - ib$ et $\overline{z'} = a' - ib'$.

• $\overline{z + z'} = a + a' - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$
• $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - iab' - ia'b - bb' = (aa' - bb') - i(ab' + a'b) = \overline{z \times z'}$
• $\overline{z^{-1}} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{ib}{a^2+b^2}$ et $(\overline{z})^{-1} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{ib}{a^2+b^2}$. $\square$

Définition 2.6

Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarques 2.7

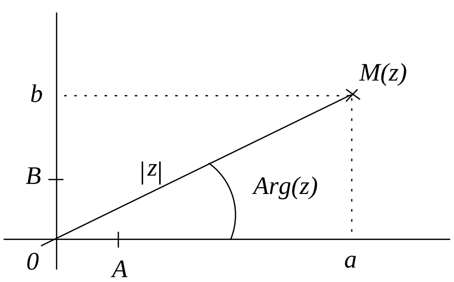
• Pour un réel, le module et la valeur absolue sont égales.
• $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
• $|z| = |\overline{z}|$.
• On a donc que l'inverse d'un complexe $z = a + ib$ est $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{|z|^2}$.

Propriétés 2.8

Soient z et z' deux complexes.

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad |z.z'| = |z|.|z'| \qquad |z^{-1}| = |z|^{-1} \qquad |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

3 Le plan complexe



Considérons le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Le complexe $z = a+ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté par le point $M(a, b)$.
On dit que M est l'image de z et que z est l'affixe de M. On note $M(z)$.
1 a pour image $A(1, 0)$ et i a pour image $B(0, 1)$.
Les réels correspondent à l'axe des abscisses.
Les imaginaires purs correspondent à l'axe des ordonnées.

Remarque 3.1

D'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = a^2 + b^2$ c'est-à-dire $OM = |z|$.

Définition 3.2

Soit z un complexe non nul et soit M son image dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle argument de z et on note $Arg(z)$ toute mesure (définie à $2k\pi$ près $k \in \mathbb{Z}$) de l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.

Notation

On note $Arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ ou $Arg(z) \equiv \theta \bmod 2\pi$ pour exprimer le fait que $Arg(z) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés 3.3

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, z est réel ssi $Arg(z) \equiv 0[\pi]$ et z est imaginaire pur ssi $Arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
De plus, $Arg(\overline{z}) \equiv -Arg(z)[2\pi]$.

Remarques 3.4

- On appelle argument principal d'un complexe la mesure de l'argument qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi[$.
- Soit $z = a + ib$ un complexe où $a, b \in \mathbb{R}$. Notons r le module de z et θ son argument.

On a : $a = r.\cos\theta$ et $b = r.\sin\theta$ d'où $z = r.\cos\theta + ir.\sin\theta$.
c'est-à-dire $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ que l'on appelle la notation trigonométrique de z.

- L'addition n'a aucun intérêt à être faite avec la notation trigonométrique.
- Soient $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i.\sin\theta')$, grâce aux formules de trigonométrie, on obtient $zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i.\sin(\theta+\theta'))$.

Propriétés 3.5

Si $z, z' \in \mathbb{C}^*$, alors $Arg(zz') \equiv Arg(z) + Arg(z')[2\pi]$.

Remarques 3.6

- Si $z \neq 0$, Puisque $z \times z^{-1} = 1$, en utilisant la propriété ci-dessus, on obtient : $Arg(z^{-1}) \equiv -Arg(z)[2\pi]$.
- On montre aussi que $|z^n| = |z|^n$ et $Arg(z^n) \equiv n.Arg(z)[2\pi]$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$.

4 Notation exponentielle

Remarques 4.1

Pour tout réel α, on note $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

Définition 4.2

Soient a et b deux réels. On définit $e^{a+ib} = e^a \times e^{ib}$

Propriété 4.3

Soient z et z' deux complexes et n un entier relatif. On a :
$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ et $e^{nz} = (e^z)^n$

Propriété 4.4

Formule de Moivre : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Propriété 4.5

Formules d'Euler : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.