Chapitre 7 : Fonctions usuelles

F. Wlazinski

23rd December 2003

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier et f est un élément de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

1 Fonctions réciproques

1.1 Théorème de la bijection réciproque

Théorème 1.1

On suppose que f est continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
De plus, la bijection réciproque f^{-1}, de J vers I, est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que f).

Remarques 1.2

- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ (si le repère est orthonormal, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$).
- Si f est continue sur l'intervalle I, l'intervalle $J = f(I)$ n'a pas toujours les mêmes propriétés que I (caractères ouvert ou fermé, borné ou non borné), sauf dans le cas où I est un segment. Mais si f est strictement monotone, le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé de I est conservé.

Exemples 1.3

Exemples d'inversions d'applications continues
- L'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.
- Pour tout α de $\mathbb{R}^{+*}$, les applications $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.

Propriété 1.4

Soit f une application bijective dont la réciproque est notée f^{-1}.
Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration

$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$.
Si on pose $y = f(x)$, on a, du fait de la continuité de f, que $y \to b \Leftrightarrow x \to a$.

Donc $\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\dfrac{x-a}{f(x)-f(a)}$ et $\left(f^{-1}\right)'(b)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$. $\square$

2 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

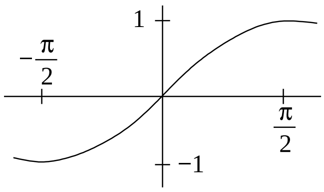
2.1 Fonction arc sinus

Rappel

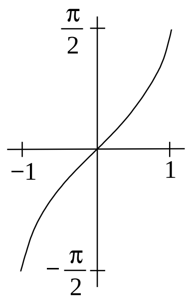
- La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction sinus est 2π-périodique.
- La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- $\sin\left(\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$.

Définition 2.1

L'application sinus définit une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$ et on appelle arc sinus son application réciproque qui est notée arcsin.



Sinus



Arc sinus

Remarques 2.2

- On rencontre parfois la notation $\sin^{-1}$.
- $\arcsin\,:[-1;1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- $\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin x)=x$.
- $\forall x\in[-1;1],\ \sin(\arcsin x)=x$.
- $\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right], \forall y\in[-1;1],\ \sin x=y\ \Leftrightarrow\ x=\arcsin y$.

Propriété 2.3

La fonction arc sinus est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x\in]-1;1[,\ (\arcsin)'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration

Soit f la restriction de sinus à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a donc $f^{-1}=\arcsin$.
D'après le théorème sur les dérivées des fonctions réciproques, f^{-1} est dérivable en $b=f(a)$ si et seulement si $f'(a)\neq 0$.
$(\sin)'x=0\ \Leftrightarrow\ \cos x=0\ \Leftrightarrow\ x=-\dfrac{\pi}{2}$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}$
$\arcsin -\dfrac{\pi}{2}=-1$ et $\arcsin\dfrac{\pi}{2}=1$.
On a donc $\forall x\in]-1;1[,\ (f^{-1})'(x)=(\arcsin)'(x)=\dfrac{1}{(\sin)'(\arcsin x)}=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$.
Or $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, $\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x\geq 0$ et $\arcsin x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Donc $\forall x\in]-1;1[,\ (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\square$

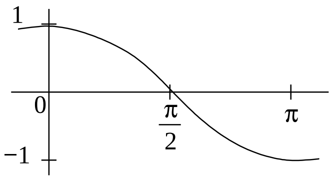
2.2 Fonction arc cosinus

Rappel

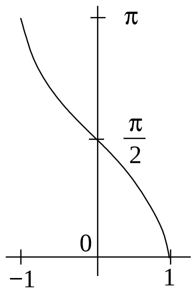
- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus est 2π-périodique.
- La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.
- $\cos([0; \pi]) = [-1; 1]$.

Définition 2.4

L'application cosinus définit une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$ et on appelle arc cosinus son application réciproque qui est notée arccos.



Cosinus



Arc cosinus

Remarques 2.5

- On rencontre parfois la notation $\cos^{-1}$.
- $\arccos\ : [-1; 1] \to [0; \pi]$.
- $\forall x \in [0; \pi],\ \arccos(\cos x) = x$.
- $\forall x \in [-1; 1],\ \cos(\arccos x) = x$.
- $\forall x \in [0; \pi], \forall y \in [-1; 1],\ \cos x = y\ \Leftrightarrow\ x = \arccos y$.

Propriété 2.6

$\forall x \in [-1; 1],\ \arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration

Soit $y = \arcsin x$, on a $x = \sin y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$.
Donc $\dfrac{\pi}{2} - y = \arccos x$ et $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - y + y$. $\square$

Remarque 2.7

La fonction arc cosinus est donc dérivable sur $]-1; 1[$ et $\forall x \in]-1; 1[,\ (\arccos)'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

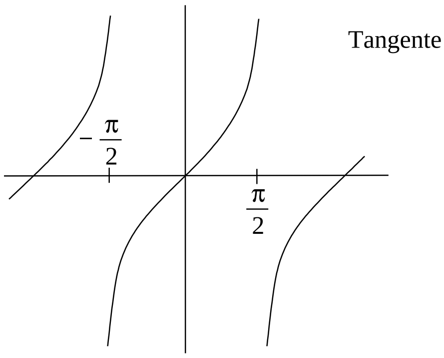
2.3 Fonction arc tangente

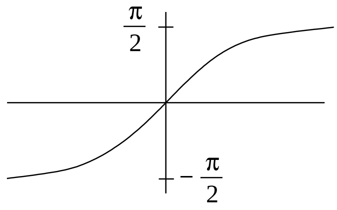
Rappel

- La fonction tangente est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
- La fonction tangente est π-périodique.
- La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
- $\tan\left(\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

Définition 2.8

L'application tangente définit une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et on appelle arc tangente son application réciproque qui est notée arctan.





Arc tangente

Remarques 2.9

- On rencontre parfois la notation $\tan^{-1}$.
- $\arctan\ : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R},\ \tan x = y \ \Leftrightarrow\ x = \arctan y$.

Propriété 2.10

La fonction arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration

Soit f la restriction de tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a donc $f^{-1} = \arctan$.
f' ne s'annule jamais. D'après le théorème sur les dérivées des fonctions réciproques :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})'(x) = (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{(\tan)'(\arctan x)} = \dfrac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2}$. □

3 Fonctions hyperboliques

Définition 3.1

On appelle cosinus hyperbolique et on note ch ou cosh la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On appelle sinus hyperbolique et on note sh ou sinh la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

On appelle tangente hyperbolique et on note th ou tanh la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Remarques 3.2

- La décomposition unique de la fonction exponentielle en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire donne les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique .
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ permet de déterminer les limites aux bornes.

On vérifie à partir de la définition que :

Propriété 3.3

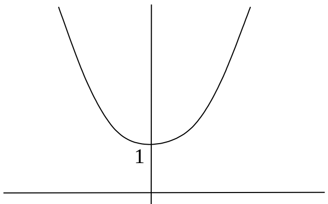
La fonction cosinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x$ (c'est-à-dire $(\operatorname{ch})' = \operatorname{sh}$).

La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\operatorname{sh})' = \operatorname{ch}$.

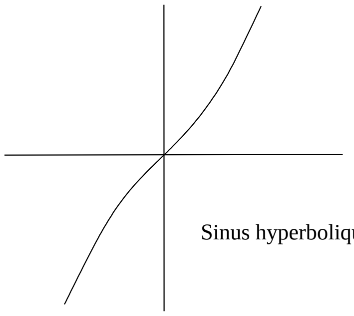
La fonction tangente hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\text{th}\,)' = 1 - \text{th}^{\,2} = \dfrac{1}{\text{ch}^{\,2}}$.
$\text{ch}^{\,2} - \text{sh}^{\,2} = 1$.
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \text{ch}\,(a+b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b$.
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \text{sh}\,(a+b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b + \text{ch}\,a\,\text{sh}\,b$.

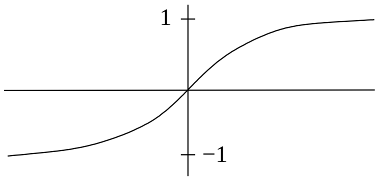
Remarques 3.4

- On trouve les formules $\text{ch}\,(a-b)$ ou $\text{ch}\,2a$ à partir des précédentes.
- Les courbes représentatives sont les suivantes :



Cosinus hyperbolique


Sinus hyperbolique



Tangente hyperbolique

4 Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

4.1 Fonction argument sinus hyperbolique

Remarques 4.1

- sh est continue sur $\mathbb{R}$.
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\text{sh}\,(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- On cherche à résoudre l'équation : $\text{sh}\,x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{sh}\,x = a \ &\Leftrightarrow\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} = a \\ &\Leftrightarrow\ e^x - e^{-x} + = 2a \\ &\Leftrightarrow\ e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

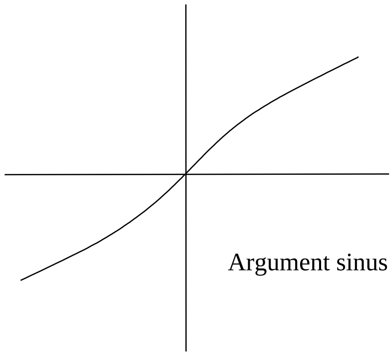
On doit résoudre l'équation $X^2 - 2aX - 1 = 0$ avec $X = e^x \geq 0$.
$\Delta = 4(a^2+1) = \left(2\sqrt{a^2+1}\right)^2$.
$X_1 = \dfrac{2a - 2\sqrt{a^2+1}}{2} = a - \sqrt{a^2+1}$ et $X_2 = a + \sqrt{a^2+1}$.
$X_1 < 0$ donc ne convient pas.
D'où $e^x = a + \sqrt{a^2+1}$ c'est-à-dire $x = \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$.

Définition 4.2

L'application sinus hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on appelle argument sinus hyperbolique son application réciproque qui est notée argsh.

Remarques 4.3

- On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
- On a la courbe représentative :



Argument sinus hyperbolique

Propriété 4.4

La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Démonstration

Soit f la fonction sh. On a donc $f^{-1} = \operatorname{argsh}$.
D'après le théorème sur les dérivées des fonctions réciproques, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.
$(\operatorname{sh})'x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} x = 0$ impossible.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = (\operatorname{argsh})'(x) = \dfrac{1}{(\operatorname{sh})'(\operatorname{argsh} x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)}$.
Or $\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x))^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. $\square$

Remarque 4.5

On aurait pu utiliser aussi dériver $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

4.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

Remarques 4.6

- ch est continue sur $\mathbb{R}$.
- ch est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- $\operatorname{ch}([0; +\infty[) = [1; +\infty[$.
- On cherche à résoudre l'équation : $\operatorname{ch} x = a$ avec $a \geq 1$ et surtout $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x = a &\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = a \\ &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2a \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0\end{aligned}$$

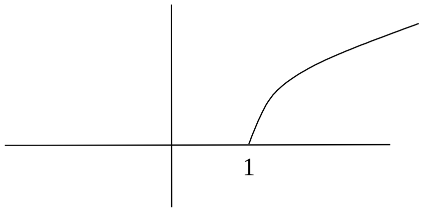
On doit résoudre l'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ avec $X = e^x$.
Puisque $x \geq 0$, on a $X \geq 1$.
$\Delta = 4(a^2-1) = \left(2\sqrt{a^2-1}\right)^2$.
$X_1 = \dfrac{2a - 2\sqrt{a^2-1}}{2} = a - \sqrt{a^2-1}$ et $X_2 = a + \sqrt{a^2-1}$.
$X_1 < 1$ donc ne convient pas.
D'où $e^x = a + \sqrt{a^2-1}$ c'est-à-dire $x = \ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)$.

Définition 4.7

L'application cosinus hyperbolique définit une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$, on appelle argument cosinus hyperbolique son application réciproque qui est notée argch.

Remarques 4.8

- On a donc $\forall x \in [1;+\infty[,\ \operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.
- On a la courbe représentative :



Argument cosinus hyperbolique

Propriété 4.9

La fonction argch est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[, (\operatorname{argch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Démonstration

Soit f la restriction de ch à l'intervalle $[0;+\infty[$. On a donc $f^{-1} = \operatorname{argch}$.
D'après le théorème sur les dérivées des fonctions réciproques, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.
$(\operatorname{ch})'x = 0 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{sh} x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$ et $\operatorname{argch} 0 = 1$.
On a donc $\forall x \in]1;+\infty[,\ (f^{-1})'(x) = (\operatorname{argch})'(x) = \dfrac{1}{(\operatorname{ch})'(\operatorname{argch} x)} = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)}$.
Or $\operatorname{sh} x = +/-\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$, $\forall x \in]0;+\infty[,\ \operatorname{sh} x > 0$ et $\operatorname{argch} x \in]0;+\infty[$.
Donc $\forall x \in]1;+\infty[,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x))^2 - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. $\square$

4.3 Fonction argument tangente hyperbolique

Remarques 4.10

- th est continue sur $\mathbb{R}$.
- th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$.
- On cherche à résoudre l'équation : $\operatorname{th} x = a$ avec $-1 < a < 1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{th} x = a \ &\Leftrightarrow\ \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = a \\
&\Leftrightarrow\ e^{2x} - 1 = ae^{2x} + a \\
&\Leftrightarrow\ e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}
\end{aligned}$$

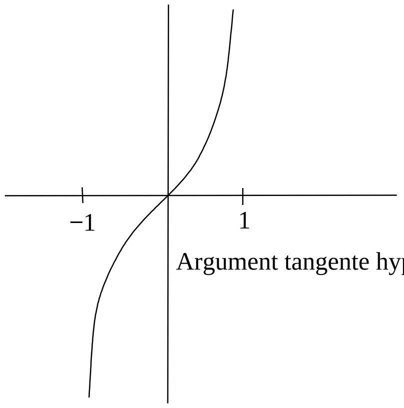
On a bien $\dfrac{1+a}{1-a} > 0$, donc $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+a}{1-a}$.

Définition 4.11

L'application tangente hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$, on appelle argument tangente hyperbolique son application réciproque qui est notée argth.

Remarques 4.12

- On a donc $\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
- On a la courbe représentative :



Argument tangente hyperbolique

Propriété 4.13

La fonction argth est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$, $(\text{argth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Démonstration

Soit f la fonction th . On a donc $f^{-1} = \text{argth}$.
D'après le théorème sur les dérivées des fonctions réciproques, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.
$(\text{th}\,)'x = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{\text{ch}\,^2 x} = 0$: impossible.
On a donc $\forall x \in]1;1[$, $(f^{-1})'(x) = (\text{argth})'(x) = \dfrac{1}{(\text{th}\,)'(\text{argth}\, x)} = \dfrac{1}{1-\text{th}\,(\text{argth}\, x)^2}$. □