

Réduction des endomorphismes

Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E est un espace vectoriel sur K et n est un entier naturel non nul.

1. Valeurs propres et vecteurs propres

1.1. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 1.1

Soient f un endomorphisme de E , et F un s.e.v. de E .
On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$.

Remarques 1.2

- F est stable par f si et seulement si on a l'implication $x \in F \Rightarrow f(x) \in F$.
- La restriction de f à F est alors un endomorphisme de F , dit induit par f sur F .

Exemple 1.3

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$.
 $\mathbb{R}_2[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ .

Propriété 1.4

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v. de E .
Si F est stable par f alors F est stable par f^p , $\forall p \in \mathbb{N}$.

Démonstration *Exercice 4.1*

Propriété 1.5

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in K$ et F un s.e.v. de E .
Si F est stable par f et par g alors F est stable par $\lambda f + \mu g$.

Démonstration *Exercice 4.2*

Remarque 1.6

Soit $H = \{f \in \mathcal{L}(E) / f(F) \subset F\}$.
On a, en particulier, que $H \neq \emptyset$ car $\text{Id} \in H$.
 H est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété 1.7

Si f et g commutent dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$ sont stables par g .

Démonstration

Exercice 4.3

Propriété 1.8

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $p, n \in \mathbb{N}$. Si f et g commutent, alors f^n et g^p commutent.

Propriétés 1.9

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout j de $\{1, \dots, n\}$, soit $F_j = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$.

La matrice de f dans (e) est diagonale si et seulement si les droites vectorielles $\langle e_j \rangle$ sont stables par f .

La matrice de f dans (e) est triangulaire supérieure si et seulement si les sous-espaces F_j sont stables par f .

Rappel

Si $f \in \mathcal{L}_k(E)$ et $A \subset E$, alors $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$.

Démonstration

On pose $\mathcal{M}_e(f) = A = (a_{i,j})_{i=1, n, j=1, n}$.

- A diagonale $\Leftrightarrow \forall i = 1, n, f(e_i) = a_{i,i}e_i$.
 $a_{i,i} = 0 \Leftrightarrow f(\langle e_i \rangle) = 0$ et $a_{i,i} \neq 0 \Leftrightarrow f(\langle e_i \rangle) = \langle e_i \rangle$. Donc $f(e_i) = a_{i,i}e_i \Leftrightarrow f(\langle e_i \rangle) \subset \langle e_i \rangle$.
- Réciproquement, $f(\langle e_i \rangle) \subset \langle e_i \rangle \Rightarrow f(e_i) \in \langle e_i \rangle$.
- On peut remarquer que $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n$.
 A triangulaire supérieure $\Leftrightarrow \forall i = 1, n, f(e_i) = a_{1,i}e_1 + \dots + a_{i,i}e_i \Leftrightarrow \forall i = 1, n, f(e_i) \in F_i$.

Remarque 1.10

Une matrice d'ordre n de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est notée $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

1.2. Endomorphismes stabilisant les sous-espaces d'une somme directe

Propriété 1.11

On suppose que E est de dimension finie et que $E = F \oplus G$, F et G étant distincts de $\{0\}$.

On note (e) une base de E obtenue en juxtaposant une base de F et une base de G .

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et M la matrice de f dans la base (e) .

A et C désignent ci-dessous deux matrices carrées de tailles respectives $\dim F$ et $\dim G$. Alors

F est stable par f si et seulement si M s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

F et G sont stables par f si et seulement si M s'écrit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Remarque 1.12

Si on suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, où F_1, \dots, F_p sont tous distincts de $\{0\}$.

On munit E d'une base (e) adaptée à cette somme directe, c'est-à-dire obtenue par juxtaposition des bases $(e)_1$ de $F_1, \dots, (e)_p$ de F_p .

Soit f un endomorphisme de E , de matrice M dans la base (e) .

Les s.e.v. F_k sont stables par f si et seulement si M est diagonale par blocs, et plus précisément est formée de p blocs M_k ayant successivement les tailles $\dim F_1, \dim F_2, \dots, \dim F_p$.

Dans ces conditions, si on note g_k la restriction de f à F_k , le $k^{\text{ème}}$ bloc M_k de M est la matrice de g_k dans la base $(e)_k$ de F_k , et $\det f = \det M = \prod_{k=1}^n \det g_k = \prod_{k=1}^n \det M_k$.

1.3. Polynômes de matrices et d'endomorphismes

Définition 1.13

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p = \sum_{k=0}^p a_kX^k$ un polynôme à coefficients dans K ($\in K[X]$).

On définit la matrice $P[M]$ par $P[M] = a_0I_n + a_1M + a_2M^2 + \dots + a_pM^p = \sum_{k=0}^p a_k M^k$.

On dit que $P[M]$ est un polynôme en M .

Si $P[M] = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de M .

Exemples 1.14

- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = 5X^2 + 3X - 2$.

On a $P[M] = 5M^2 + 3M - 2I_2$ c'est-à-dire :

$$P[M] = 5 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

$$\text{On obtient } P[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Remarque 1.15

Attention : $P \in K[X]$ et $P[M] \in \mathcal{M}_n(K)$.

Propriété 1.16

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

L'application $P \mapsto P[M]$ de $K[X]$ vers $\mathcal{M}_n(K)$ est un morphisme d'algèbres.

Remarque 1.17

On a donc :

$\forall P, Q \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\forall \alpha, \beta \in K$,

$(\alpha P + \beta Q)[M] = \alpha P[M] + \beta Q[M]$

$(\lambda P)[M] = \lambda \cdot P[M]$

$(P \times Q)[M] = P[M] \times Q[M]$

$1[M] = I_n$.

Propriété 1.18

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

L'ensemble $J = \{P \in K[X] \mid P[M] = 0\}$ des polynômes annulateurs de M est un idéal non nul de $K[X]$ dont on note π_M le générateur unitaire qui est appelé polynôme minimal de M .

(La preuve de "non nul" n'est pas triviale)

Rappel

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(K)$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P de $GL_n(K)$ telle que $M = P^{-1}NP$.

Propriété 1.19

Deux matrices semblables ont des polynômes minimaux égaux.

Démonstration

Exercice 4.4

Propriété 1.20

Soient $A_1 \in \mathcal{M}_n(K)$ et $A_2 \in \mathcal{M}_p(K)$. On définit $A \in \mathcal{M}_{n+p}(K)$ par $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2)$.

On a $\pi_A = \text{ppcm}(\pi_{A_1}, \pi_{A_2})$.

Remarque 1.21

On admettra que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix} = \text{diag}(A_1^k, A_2^k)$ et que,

$\forall P \in K[X]$, $P[A] = \begin{pmatrix} P[A_1] & 0 \\ 0 & P[A_2] \end{pmatrix} = \text{diag}(P[A_1], P[A_2])$.

Démonstration

Exercice 4.5

Rappel

Soit f un endomorphisme de E . On note $f^0 = \text{Id}_E$, $f^1 = f$ et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \geq 2 \text{ fois}}$.

On a $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $f^p \circ f^q = f^{p+q}$.

Si de plus f est inversible, c'est-à-dire si $f \in GL(E)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^p = (f^{-1})^{-p}$.

On étend alors la propriété précédente : $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $f^p \circ f^q = f^{p+q}$.

$(\mathcal{L}_K(E), +, \cdot)$ est un K -e.v., $(\mathcal{L}_K(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif et $(\mathcal{L}_K(E), +, \circ, \cdot)$ est une K -algèbre.

Définition 1.22

Soit f un endomorphisme de E .

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{p-1}X^{p-1} + a_pX^p = \sum_{i=0}^p a_iX^i$ un polynôme à coefficients dans K .

On définit l'endomorphisme $P[f]$ par $P[f] = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \dots + a_1 f + a_0 I = \sum_{i=0}^p a_i f^i$.

On dit que $P[f]$ est un polynôme de l'endomorphisme f .

Remarque 1.23

$P \in K[X]$ et $P[f] \in \mathcal{L}_K(E)$.

Exemple 1.24

Soit φ l'application définie sur $C^\infty(\mathbb{R})$ par $\varphi(f) = 2f - f'$. On a bien $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathbb{R}))$.

Soit $P = X^2 + X + 1$, on a $P[\varphi] = \varphi^2 + \varphi + \text{Id} = \varphi \circ \varphi + \varphi + \text{Id}$.

Et $P[\varphi](f) = \varphi(2f - f') + 2f - f' + f = 4f - 2f' - 2f' + f'' + 3f - f' = 7f - 5f' + f''$.

Remarques 1.25

- Si $P = 1$, $P[f] = \text{Id}$.
- Si $P = a$, $P[f] = a \text{Id}$.
- Si $P = X^j$, alors $P[f] = f^j$.
- On note $K[f] = \{P[f] / P \in K[X]\}$.

Propriété 1.26

Soit E un K -e.v. de dimension finie $n \geq 1$, muni d'une base (e) .

Soit f un endomorphisme de E , de matrice M dans la base (e) et soit P un polynôme de $K[X]$.

Alors la matrice de $P[f]$ dans la base (e) est $P[M]$.

Remarque 1.27

On dispose de propriétés analogues à celles des polynômes de matrices.

En particulier :

Propriétés 1.28

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in K[X]$.

- Si un s.e.v. F de E est stable par f , alors il est stable par $P[f]$.
- L'application $P \mapsto P[f]$ est un morphisme de l'algèbre $K[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
 $\forall \alpha, \beta \in K, (\alpha P + \beta Q)[f] = \alpha P[f] + \beta Q[f]$.
 $(PQ)[f] = P[f] \circ Q[f]$.

Exemple 1.29

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $P = X + 1$ et $Q = X^2 + 2X$.

$P[f] = f + \text{Id}$, $Q[f] = f^2 + 2f$ et $PQ = X^3 + 3X^2 + 2X$.

Donc $(PQ)[f] = f^3 + 3f^2 + 2f$ et $P[f] \circ Q[f] = f(f^2 + 2f) + f^2 + 2f = f^3 + 3f^2 + 2f$.

Propriété 1.30

Soient $f, g \in \mathcal{S}(E)$ et $P, Q \in K[X]$.

Si f et g commutent, alors $P[f]$ et g commutent et $P[f]$ et $Q[g]$ commutent.

Remarque 1.31

En particulier, $P[f]$ et $Q[f]$ commutent.

Démonstration

C'est une conséquence de la propriété 1.8.

Propriété 1.32

Soient $f, g \in \mathcal{S}(E)$ et $P, Q \in K[X]$.

Si f et g commutent, alors $\text{Ker } P[f]$ et $\text{Im } P[f]$ sont stables par $Q[g]$.

Démonstration

Voir Propriété 1.7.

Définition 1.33

Soit f un endomorphisme de E . Soit P un polynôme à coefficients dans K .

Si $P[f] = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de f .

Exemple 1.34

Soit f une involution de E et soit $P = X^2 - 1$.

On a : $f \circ f = \text{Id}$
 $\Leftrightarrow f^2 - \text{Id} = 0$
 $\Leftrightarrow P[f] = 0.$

Définition 1.35

Soit f un endomorphisme de E . On dit que f est nilpotent d'ordre $p \geq 1$ si et seulement si X^p est un polynôme annulateur de f et X^{p-1} n'en est pas un.

Remarque 1.36

On a : f est nilpotent d'ordre $p \geq 1$
 $\Leftrightarrow f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0.$
 $\Leftrightarrow \forall x \in E, f^p(x) = 0$ et $\exists x \in E / f^{p-1}(x) \neq 0.$

Exemple 1.37

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(A) = A'$.

Soit $P = X^4$, on a $P[\varphi] = 0$ c'est-à-dire $\forall A (= aX^3 + bX^2 + cX + d) \in \mathbb{R}_3[X], \varphi^4(A) = A^{(4)} = 0.$

Soit $Q = X^3$, on a $Q[\varphi] \neq 0$ car $\varphi^3(2X^3) = 12 \neq 0.$

Propriété 1.38

Soit f un endomorphisme de E (de dimension finie).

On note $J = \{P \in K[X] \mid P[f] = 0\}$ (J est l'ensemble des polynômes annulateurs de f).

J est un idéal non nul de $K[X]$ dont on note π_f le générateur unitaire.

π_f est appelé le polynôme minimal de f .

Rappel

$(\mathcal{L}_K(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif.

L'élément neutre pour la loi $+$ noté 0 est l'application linéaire qui, à tout x de E associe 0_E .

On a : $\forall f \in \mathcal{L}_K(E), f \circ 0 = 0 \circ f = 0$ (c'est une propriété générale des anneaux).

Remarques 1.39

- $\pi_f \in K[X]$.
- $\pi_f[f] = 0$.
- Le degré de π_f est minimal dans J .
- $\forall P \in J$ (c'est-à-dire $\forall P \in K[X] \mid P[f] = 0$), $\exists \tilde{P} \in K[X] \mid P = \tilde{P} \times \pi_f$.

Démonstration

Exercice 4.6

Propriété 1.40

Soit f un endomorphisme de E .

Soit $\pi_f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p$ le polynôme minimal de f .

On a : f est inversible $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$.

Démonstration

Exercice 4.7

Propriété 1.41

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in K[X]$.

On a $\text{Ker}(\text{pgcd}(P, Q)[f]) = \text{Ker } P[f] \cap \text{Ker } Q[f]$.

En particulier, si P et Q sont premiers entre eux, alors la somme $\text{Ker } P[f] \oplus \text{Ker } Q[f]$ est directe.

Démonstration

Exercice 4.8

Propriété 1.42

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in K[X]$ deux polynômes premiers entre eux.

On a $\text{Ker} (PQ)[f] = \text{Ker } P[f] \oplus \text{Ker } Q[f]$.

En particulier, si $(PQ)[f] = 0$ (i.e. PQ est un polynôme annulateur de f), alors $E = \text{Ker } P[f] \oplus \text{Ker } Q[f]$.

Démonstration

Exercice 4.9

Remarque 1.43

Si P et Q sont deux polynômes de $K[X]$ premiers entre eux et si $(PQ)[f] = 0$, alors les projecteurs p_1 et p_2 associés à la somme directe $E = \text{Ker } P[f] \oplus \text{Ker } Q[f]$ sont des polynômes en f .

En effet, si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Ker } P[f]$ et $x_2 \in \text{Ker } Q[f]$, on a :

$$p_1(x) = x_1 = ((BQ)[f])(x) \text{ c'est-à-dire } p_1 = (BQ)[f].$$

$$p_2(x) = x_2 = ((AP)[f])(x) \text{ c'est-à-dire } p_2 = (AP)[f].$$

On étend ce résultat :

Propriété 1.44

Soit $f \in \mathcal{S}_K(E)$.

Soient (P_1, P_2, \dots, P_r) des polynômes non nuls de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux.

On pose $\forall i = 1, r, N_i = \text{Ker } P_i[f]$, $\Pi = \prod_{i=1}^r P_i$ et $N = \text{Ker } \Pi[f]$. Alors :

- $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r$.
- Si $\Pi[f] = 0$, $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r$.

Remarque 1.45

Dans ce dernier cas, les projecteurs associés à la décomposition en somme directe sont des polynômes en f (i.e. $p_i \in K[f]$).

Démonstration

- Par récurrence sur n .
Vrai au rang 2 d'après la propriété précédente.
On suppose vrai jusqu'au rang $n - 1$.
Les polynômes P_1 et $Q = \prod_{i=2}^n P_i$ sont premiers entre eux.
D'après la propriété précédente, $N = \text{Ker } P[f] \oplus \text{Ker } Q[f]$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\text{Ker } Q[f] = N_2 \oplus N_3 \oplus \dots \oplus N_n$.
D'où le résultat.
- Idem Propriété précédente.

Théorème 1.46

Soit f un endomorphisme de E .

On suppose que $\pi_f = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_r$ avec les P_i unitaires et deux à deux premiers entre eux.

On pose $N_i = \text{Ker } P_i(f)$ pour tout $i = 1, r$. On a :

- $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r$.
- Le polynôme minimal de la restriction de f à N_i est P_i .

Corollaire 1.47

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ et π_f son polynôme minimal.

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ avec E_1 et E_2 stables par f .

Soient π_1 le polynôme minimal de la restriction de f à E_1 et π_2 le polynôme minimal de la restriction de f à E_2 . Alors π_f divise $\pi_1 \pi_2$.

1.4. Valeurs propres d'une matrice

Rappels

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

- On a A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$.
- Si A inversible alors $AX = 0 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 \Rightarrow X = 0$.
Inversement, si $(AX = 0 \Rightarrow X = 0) \forall X \in \mathcal{M}_r(K)$ pour tout $r \geq 1$ alors A est inversible.
En effet, soit (e) la base canonique de K^n et soit $f \in \mathcal{L}(K^n)$ telle que $A = \mathcal{M}_{(e)}(f)$.
On a $f(X) = f(X') \Leftrightarrow AX = AX' \Leftrightarrow AX - AX' = 0 \Leftrightarrow A(X - X') = 0 \Rightarrow X - X' = 0 \Rightarrow X = X'$.
Donc f injective.
Or puisque f est un endomorphisme, on a : f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.
Donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = n$

Définition 1.48

Soient M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ et λ un élément de K .

On dit que λ est une valeur propre de M si et seulement si il existe au moins un vecteur colonne X_0 non nul tel que $MU_0 = \lambda U_0$. Un tel vecteur U_0 est appelé vecteur propre de M pour la valeur propre λ .
L'ensemble des valeurs propres éventuelles de M dans K est appelé le spectre de M dans K , et est noté $\text{Sp}_K(M)$.

Exemple 1.49

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ On a } \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre de A de valeur propre 2.

Remarques 1.50

- $MU_0 = \lambda U_0 \Leftrightarrow MU_0 - \lambda U_0 = 0 \Leftrightarrow (M - \lambda I_n)(U_0) = 0$.
Donc, puisque $U_0 \neq 0$, on a $\det(M - \lambda I_n) = 0$.
- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut considérer que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si on note $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice réelle, et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ le spectre de M considérée comme matrice complexe, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.
Cette inclusion peut être stricte.
Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-i, i\}$.

Propriété 1.51

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Pour tout scalaire λ , l'ensemble $E_\lambda = \{X \in K^n / AX = \lambda X\}$ est un s.e.v. de K^n .

Démonstration

Exercice 4.10

Propriété 1.52

Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres.

Démonstration

Exercice 4.11

Remarque 1.53

Autrement dit, si M et N sont deux matrices semblables, on a $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(N)$.

Plus précisément, X est un vecteur (colonne) propre de N si et seulement si $P^{-1}X$ est un vecteur (colonne) propre de $M = P^{-1}NP$ (et pour la même valeur propre).

1.5. Valeurs propres d'un endomorphisme

Définition 1.54

Soient f un endomorphisme de E et λ un élément de K .

On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe au moins un vecteur u_0 non nul tel que $f(u_0) = \lambda u_0$. Un tel vecteur est appelé vecteur propre de f pour la valeur propre λ .

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé le spectre de f et est noté $\text{Sp}(f)$ ou $\text{Sp}_K(f)$.

Remarques 1.55

- $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow f(u) - \lambda u = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id})(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$.
- L'ensemble des vecteurs vérifiant $f(u) = \lambda u$ est donc un s.e.v. de E .
- λ est une valeur propre de $f \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$
 $\Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}$ n'est pas injectif $\Leftrightarrow \det(f - \lambda \text{Id}) = 0$.

Définition 1.56

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f .

Le sous-espace $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda I)$ est alors appelé sous-espace propre de f pour la valeur propre λ .

Remarque 1.57

Les vecteurs propres de f , pour la valeur propre λ , sont les éléments non nuls de E_λ .

Exemples 1.58

Dans \mathbb{R}^2 , soit D_1 la droite vectorielle engendrée par $u_1 = (1, 1)$ et D_2 la droite vectorielle engendrée par $u_2 = (-1, 1)$. On a $E = D_1 \oplus D_2$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists! (x_1, x_2) \in D_1 \times D_2 / x = x_1 + x_2$.

- Soit f la projection sur D_1 parallèlement à D_2 .
On a $\forall x \in D_1, f(x) = x$ et $\forall x \in D_2, f(x) = 0$. Donc 1 et 0 sont des valeurs propres de f .
On a $E_1 = D_1$ et $E_0 = D_2$ et $\mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Soit g la symétrie orthogonale par rapport à D_1 .
On a $\forall x \in D_1, g(x) = x$ et $\forall x \in D_2, g(x) = -x$. Donc 1 et -1 sont des valeurs propres de f .
On a $E_1 = D_1$ et $E_{-1} = D_2$ et $\mathcal{M}_{(u_1, u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Propriété 1.59

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(K)$, et soit f un endomorphisme d'un K -e.v. E de dimension n , ayant pour matrice M dans une base (e) de E . Les valeurs propres de M sont celles de f .

Soient λ un scalaire, u un vecteur de E et U la matrice colonne de ses coordonnées dans la base (e) . Alors u est vecteur propre de f pour λ si et seulement si U est vecteur propre de M pour λ . Ce qui précède s'applique en particulier à l'endomorphisme f de K^n de matrice M dans la base canonique.

Remarques 1.60

- On a donc : $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow MU = \lambda U$.
- Cas particulier : 0 est valeur propre de f si et seulement si f est non injective. Le sous-espace propre est alors $E_0 = \text{Ker}(f)$.
- Soit u un vecteur non nul. Dire que u est vecteur propre de f , c'est dire que la droite vectorielle $\langle u \rangle = Ku$ est stable par f .
- La restriction de f à E_λ est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.

Exemples 1.61

- L'endomorphisme f de $K[X]$ défini par $f(P) = XP$ n'a aucune valeur propre.
- L'endomorphisme f de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $f(u) = u'$ admet tout réel pour valeur propre. Pour tout réel λ , E_λ est la droite vectorielle engendrée par $u : x \mapsto \exp(\lambda x)$.

1.6. Vecteurs et valeurs propres. Propriétés

Propriété 1.62

Soient λ_1, λ_2 deux valeurs propres différentes de $f \in \mathcal{L}_K(E)$.

Notons E_1, E_2 les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2$ est directe c'est-à-dire $E_1 \oplus E_2$.

Démonstration

Soit $x \in E_1 \cap E_2$. $x \in E_1 \Rightarrow f(x) = \lambda_1 x$

$x \in E_2 \Rightarrow f(x) = \lambda_2 x$

On a donc $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ c'est-à-dire $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$

Or $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ donc $x = 0$.

Remarque 1.63

Soit f un endomorphisme de E et u un élément de E .

Si u est vecteur propre de f , ce ne peut être que pour une seule valeur propre : l'unique scalaire λ qui vérifie $f(u) = \lambda u$. Mais si λ est une valeur propre de f , il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ : les vecteurs non nuls de E_λ .

Propriété 1.64

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ une famille de p valeurs propres distinctes de f .

Notons E_1, E_2, \dots, E_p les sous-espaces propres correspondants.

Alors la somme $E_1 + E_2 + \dots + E_p$ est directe.

Remarque 1.65

De manière équivalente : si u_1, u_2, \dots, u_r est une famille de vecteurs propres de f pour r valeurs propres distinctes, alors cette famille est libre.

Démonstration

Par récurrence sur p .

- Vrai pour $p = 2$.
- On suppose vrai jusqu'au rang $p - 1$ c'est-à-dire la somme $\sum_{k=1}^{p-1} E_k$ est directe.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = \sum_{i=1}^p x_i = 0$.

On doit montrer que $\forall i = 1, n$ on a $x_i = 0$.

$$f(0) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = \sum_{i=1}^p f(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0.$$

C'est-à-dire $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0$.

Or $\lambda_p(x_1 + x_2 + \dots + x_p) = 0$ i.e. $\lambda_p x_1 + \lambda_p x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0$.

D'où $(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + (\lambda_2 - \lambda_p)x_2 + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0$

D'après l'hypothèse de récurrence, la somme $\sum_{k=1}^{p-1} E_k$ est directe donc chacun des termes est nul.

Or $\lambda_i - \lambda_p \neq 0$ donc $x_i = 0$ pour tout $i = 1, p - 1$.

Et, puisqu'alors $\sum_{i=1}^{p-1} x_i = 0$, on en déduit que $x_p = 0$.

Corollaire 1.66

On suppose que E est de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit E_1, E_2, \dots, E_r les sous-espaces propres associées aux valeurs propres de f .

On a $\sum_{i=1}^r \dim E_i \leq \dim(E)$.

Remarques 1.67

- Si $\dim_K E = n$ et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f admet au plus n valeurs propres distinctes dans K .
Il en est de même pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$.
- Si les endomorphismes f et g de E commutent, alors $f - \lambda \text{Id}_E$ et g commutent et tout sous-espace propre de f est stable par g .

Propriété 1.68

Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ et soit k un entier.

Si u est vecteur propre de f pour λ , alors u est un vecteur propre de f^k pour la valeur propre λ^k .

Démonstration

Soit $u \neq 0$ un vecteur propre de f de valeur propre λ . On démontre le résultat par récurrence.

- Vrai au rang 1 (et 0).
- On suppose vrai au rang $p - 1$ c'est-à-dire $f^{p-1}(u) = \lambda^{p-1}u$.
 $f^p(u) = (f \circ f^{p-1})(u) = f(f^{p-1}(u)) = f(\lambda^{p-1}u) = \lambda^{p-1}f(u) = \lambda^{p-1}\lambda u = \lambda^p u$.

Propriété 1.69

Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $K[X]$.

Si u est vecteur propre de f pour λ , alors u est un vecteur propre de $P[f]$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration

Soit $u \neq 0$ un vecteur propre de f de valeur propre λ .

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{p-1}X^{p-1} + a_pX^p = \sum_{i=0}^p a_iX^i$ un polynôme à coefficients dans K .

On a $P[f] = a_p f^p + a_{p-1} f^{p-1} + \dots + a_1 f + a_0 I$.

D'où $P[f](u) = a_p f^p(u) + a_{p-1} f^{p-1}(u) + \dots + a_1 f(u) + a_0 I = a_p \lambda^p u + a_{p-1} \lambda^{p-1} u + \dots + a_1 \lambda u + a_0 u = P(\lambda)u$.

Remarque 1.70

On a un énoncé équivalent pour les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.

Propriété 1.71

Si P est un polynôme annulateur de f , i.e. $P[f] = 0$, alors les valeurs propres de f sont des racines de P .

Démonstration

Soit $u \neq 0$ un vecteur propre de f de valeur propre λ . Donc $0 = P[f](u) = P(\lambda)u \Rightarrow P(\lambda) = 0$.

Remarque 1.72

Si f est nilpotente, alors $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

1.7. Automorphismes intérieurs, matrices semblables

Propriété 1.73

Soit a un automorphisme de E c'est-à-dire $a \in GL(E)$.

L'application φ_a de $\mathcal{L}_K(E)$ dans $\mathcal{L}_K(E)$ définie par $f \mapsto \varphi_{a,f} = a \circ f \circ a^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Les applications φ_a sont appelées automorphismes intérieurs de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété 1.74

Avec les notations précédentes, $\text{Sp}(\varphi_{a,f}) = \text{Sp}(f)$.

Plus précisément : u est vecteur propre de f pour $\lambda \Leftrightarrow a(u)$ est vecteur propre de $\varphi_{a,f}$ pour λ .

Les sous-espaces propres de $\varphi_{a,f}$ sont donc les $a(E_\lambda)$, en notant E_λ les sous-espaces propres de f . Et puisque a est un automorphisme de E , $\dim a(E_\lambda) = \dim E_\lambda$.

Remarques 1.75

- M et N sont semblables si et seulement si elles sont susceptibles de représenter le même endomorphisme de E (avec $\dim(E) = n$), chacune dans une certaine base de E .
- Plus précisément, en reprenant les notations ci-dessus :
Si E est muni d'une base (e) , et si on note f, g, a les endomorphismes de E de matrices respectives N, M, P dans (e) , alors $g = a \circ f \circ a^{-1}$, c'est-à-dire $g = \varphi_{a,f}$.

2. Polynôme caractéristique

Dans cette partie, E est un K -e.v. de dimension finie $n \geq 1$.

2.1. Définition et premières propriétés

Rappel

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, (e) une base de E de dim n et $A = \mathcal{M}_{(e)}(f)$.

On a vu que : λ valeur propre de $f \Leftrightarrow$ il existe $x \in E$ non nul (et $X \in K^n$) tel que :

$$(f - \lambda \text{Id}_E)(x) = 0 \text{ ou } (A - \lambda I_n)X = 0.$$

On a $A - \lambda I_n \in \mathcal{M}_n(K)$.

Si $A - \lambda I_n$ était inversible on aurait $(A - \lambda I_n)X = 0 \Rightarrow X = 0$.

De même, si $f - \lambda \text{Id}_E$ était inversible on aurait $(f - \lambda \text{Id}_E)(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

On a donc : $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \det(f - \lambda \text{Id}_E) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 2.1

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

On appelle polynôme caractéristique de M et on note $\tilde{\pi}_M$ le polynôme défini par $\tilde{\pi}_M = \det(M - XI_n)$.

Exemple 2.2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On a } A - XI_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-X & -1 \\ 2 & -1-X \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{\pi}_A = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 2 & -1-X \end{vmatrix} = (X-1)(X+1) + 2 = X^2 - 1 + 2 = X^2 + 1.$$

Remarque 2.3

On a donc λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \tilde{\pi}_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ racine du polynôme caractéristique de A .

Propriété 2.4

Le polynôme caractéristique de M vérifie $\tilde{\pi}_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M) X^{n-1} + \dots + \det(M)$.

Propriété 2.5

Les matrices M et tM ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration

$${}^tM - XI_n = {}^tM - X {}^tI_n = {}^tM - {}^t(XI_n) = {}^t(M - XI_n).$$

$$\text{Donc } \tilde{\pi}_{{}^tM} = \det({}^tM - XI_n) = \det({}^t(M - XI_n)) = \det(M - XI_n) = \tilde{\pi}_M.$$

Propriété 2.6

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration

Soient A et B deux matrices semblables i.e. il existe S inversible telle que $A = S^{-1}BS$.

$$\begin{aligned} \text{On a } A - XI_n &= S^{-1}BS - XI_n \\ &= S^{-1}BS - X S^{-1}S \\ &= S^{-1}BS - X S^{-1}I_n S = S^{-1}BS - S^{-1}(XI_n)S = S^{-1}(B - XI_n)S. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \tilde{\pi}_A &= \det(A - XI_n) = \det(S^{-1}(B - XI_n)S) \\ &= \det S^{-1} \det(B - XI_n) \det S \\ &= (\det S)^{-1} \det S \det(B - XI_n) = \det(B - XI_n) = \tilde{\pi}_B. \end{aligned}$$

Définition 2.7

Soit f un endomorphisme de E .

On appelle polynôme caractéristique de f celui de la matrice M de f dans une base (e) quelconque de E .

On le note $\tilde{\pi}_f$.

Remarque 2.8

D'après la propriété précédente, il ne dépend pas de la base choisie.

Propriété 2.9

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un \mathbb{C} -e.v. de dimension $n \geq 1$, admet au moins une valeur propre.

Définition 2.10

Soient f un endomorphisme de E , M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$, et λ un élément de K .

On dit que λ est une valeur propre de M (resp. de f), avec la multiplicité k ($1 \leq k \leq n$), si λ est racine de $\tilde{\pi}_M$ (resp. de $\tilde{\pi}_f$), avec la multiplicité k .

Cette multiplicité est souvent notée $m(\lambda)$.

On parle ainsi de valeur propre simple, double, triple, ... si $m(\lambda) = 1, 2, 3, \dots$.

Propriété 2.11

Soit M une matrice carrée d'ordre n , à coefficients réels. On considère ses valeurs propres dans \mathbb{C} .

Si le nombre complexe λ est une valeur propre de M alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M , et avec la même multiplicité.

De plus, si le vecteur colonne X vérifie $MX = \lambda X$, alors on a l'égalité $M\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$.

2.2. Polynôme caractéristique et sous-espaces stables

Propriété 2.12

Soit f un endomorphisme de E et $\tilde{\pi}_f$ son polynôme caractéristique.

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2$ où F_1 et F_2 sont des s.e.v. stables par f .

Soient f_1 la restriction de f à F_1 et $\tilde{\pi}_{f_1}$ son polynôme caractéristique.

De même, soient f_2 la restriction de f à F_2 et $\tilde{\pi}_{f_2}$ son polynôme caractéristique.

Alors $\tilde{\pi}_f = \tilde{\pi}_{f_1} \times \tilde{\pi}_{f_2}$.

Démonstration

Soient $(B_1) = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ et $(B_2) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_q)$ deux bases de respectivement F_1 et F_2 .

On a $p + q = n$. Soit (b) la base obtenue en juxtaposant (B_1) et (B_2) .

Soient $M = \mathcal{M}_{(b)}(f)$, $M_1 = \mathcal{M}_{(B_1)}(f_1)$ et $M_2 = \mathcal{M}_{(B_2)}(f_2)$.

On a : $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, donc $M - XI_n = \begin{pmatrix} M_1 - XI_p & 0 \\ 0 & M_2 - XI_q \end{pmatrix}$

et $\det(M - XI_n) = \begin{vmatrix} M_1 - XI_p & 0 \\ 0 & M_2 - XI_q \end{vmatrix} = \det(M_1 - XI_p) \times \det(M_2 - XI_q)$.

Propriété 2.13

Soit f un endomorphisme de E .

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, les F_k étant non réduits à $\{0\}$.

On suppose que chaque F_k est stable par f , et on note g_k la restriction de f à F_k .

Alors $\tilde{\pi}_f = \tilde{\pi}_{g_1} \tilde{\pi}_{g_2} \dots \tilde{\pi}_{g_p}$.

Propriété 2.14

Soit f un endomorphisme de E et soit λ une valeur propre de f .

Si on note $m(\lambda)$ sa multiplicité et $d(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre E_λ , alors : $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.

Démonstration

En raisonnant par l'absurde et d'après la propriété 2.13.

Remarque 2.15

En particulier, le sous-espace vectoriel propre associé à une valeur propre simple, c'est-à-dire de multiplicité 1, est nécessairement une droite vectorielle.

3. Trigonalisation

Définition 3.1

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T , c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}MP$.

Définition 3.2

Soit f un endomorphisme d'un K -e.v. E de dimension finie $n \geq 1$.

On dit que f est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Remarque 3.3

Dire que M est trigonalisable, c'est dire que tout endomorphisme f d'un K -e.v. E de dimension n ayant pour matrice M dans une certaine base est lui-même trigonalisable.

Propriété 3.4

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$, ou encore un endomorphisme f d'un K -e.v. E de dimension n , est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans K .

Démonstration

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique de f .

C'est-à-dire $\tilde{\pi}_M = \det(M - X I_n) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \dots (\lambda_n - X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$.

Démonstration par récurrence sur la dimension (n) :

- Vrai au rang 1 : rien à montrer.
- On suppose vrai au rang $n - 1$.

On a λ_n valeur propre de $f \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda_n \text{Id}) \geq 1$.

Soit $F = \text{Im}(f - \lambda_n \text{Id})$, on a $\dim F \leq n - 1$.

Soit G un s.e.v. de dimension $n - 1$ qui contient F .

Et $\forall x \in G, f(x) = f(x) - \lambda_n x + \lambda_n x = (f - \lambda_n \text{Id})(x) + \lambda_n x$.

On a $(f - \lambda_n \text{Id})(x) \in F \subset G$ et $\lambda_n x \in G$ donc G est stable par f .

Soit $(e_0) = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de G .

On complète (e_0) avec un vecteur e_n de façon à obtenir une base (e) de E

On a $f(e_n) = (f - \lambda_n \text{Id})(e_n) + \lambda_n e_n$ avec $(f - \lambda_n \text{Id})(e_n) \in G$.

Donc $(f - \lambda_n \text{Id})(e_n)$ peut s'écrire sous la forme $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_{n-1} a_{n-1}$ pour toute base $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ de G .

On a donc $f(e_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n e_n$.

Et $\mathcal{M}_{(e)}(f) = \begin{pmatrix} N & N' \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ et N' est le vecteur colonne formé des α_i .

Or deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique donc

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i - X) = \det(\mathcal{M}_{(e)}(f) - X I_n) = (\lambda_n - X) \det(N - X I_{n-1}).$$

C'est-à-dire $\det(N - X I_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - X)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(b_0) = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ de G telle que la restriction de f à G soit triangulaire supérieure c'est-à-dire N triangulaire supérieure.

Soit alors $(b) = (b_0) \cup \{e_n\}$. On a bien $\mathcal{M}_{(b)}(f)$ triangulaire supérieure.

Remarques 3.5

- Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale, chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité.

En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure, on a

$$\tilde{\pi}_A = \det(A - X I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} - X & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} - X \end{vmatrix} = (a_{1,1} - X)(a_{2,2} - X) \dots (a_{n,n} - X).$$

- En particulier toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou encore tout endomorphisme f d'un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie $n \geq 1$, est trigonalisable.

Théorème 3.6

Hamilton - Cayley

Toute matrice est racine de son polynôme caractéristique.

Tout endomorphisme est racine de son polynôme caractéristique.

Remarques 3.7

- Cela signifie que $\tilde{\pi}_M[M] = 0$ ou que $\tilde{\pi}_f[f] = 0$.
- $\tilde{\pi}_f$ est donc un multiple de π_f .
- Si f est nilpotente d'ordre q dans un e.v. de dim n , on a $\pi[f] = X^q$ et $\tilde{\pi}[f] = (-1)^n X^n$ (on a $n \geq q$).

Démonstration

On peut supposer que $\tilde{\pi}_f$ est scindé.

En effet si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer f sur l'extension de corps où c'est le cas (corps de rupture ou clôture algébrique).

Par exemple \mathbb{C} pour tout endomorphisme sur un \mathbb{R} -e.v.

Le résultat ne dépendant pas du corps, il reste vrai.

On suppose donc que $\tilde{\pi}_f = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \dots (\lambda_n - X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$.

Soit $(b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de E où $\mathcal{M}_{(b)}(f) = (a_{i,j})_{i,j=1,n}$ est triangulaire supérieure.

Plus précisément, on suppose que $M = \mathcal{M}_{(b)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire $a_{i,i} = \lambda_i \forall i = 1, n$ et $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.

On va montrer, par récurrence, que $\forall i = 1, n$ et $\forall x \in \langle e_1, e_2, \dots, e_i \rangle$, $(f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_i \text{Id}_E)(x) = 0$.

- Vrai pour $i = 1$.

En effet, $x \in \langle e_1 \rangle \Leftrightarrow x = ke_1$ et on a $f(b_1) = \lambda_1 b_1$ c'est-à-dire $(f - \lambda_1 \text{Id}_E)(b_1) = 0$.

D'où $(f - \lambda_1 \text{Id}_E)(kb_1) = k(f - \lambda_1 \text{Id}_E)(b_1) = k \cdot 0 = 0$.

- On suppose vrai pour $i \leq p - 1$.

Soit $g = (f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_{p-1} \text{Id}_E) \circ (f - \lambda_p \text{Id}_E)$.

$x \in \langle e_1, e_2, \dots, e_p \rangle \Leftrightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{p-1} e_{p-1} + x_p e_p = \sum_{k=1}^p x_k e_k$.

D'où $g(x) = g(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{p-1} e_{p-1} + x_p e_p) = g\left(\sum_{k=1}^p x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^p x_k g(e_k)$.

Mais $\forall 1 \leq j \leq p$, $(f - \lambda_p \text{Id}_E)(e_k) = f(e_k) - \lambda_p e_k$ avec $f(e_k) \in \langle e_1, e_2, \dots, e_{p-1} \rangle$

(car la matrice est triangulaire supérieure) et $\lambda_p e_k \in \langle e_1, e_2, \dots, e_{p-1} \rangle$.

D'après l'hypothèse de récurrence,

$g(e_k) = ((f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_{p-1} \text{Id}_E))[(f - \lambda_p \text{Id}_E)(e_k)] = 0$.

D'où, pour montrer que la relation est vraie pour $i = p$, il suffit de vérifier que $g(e_p) = 0$.

Or $f(e_p) = a_{1,p} e_1 + a_{2,p} e_2 + \dots + a_{p-1,p} e_{p-1} + \lambda_p e_p = \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p} e_k + \lambda_p e_p$.

Donc $(f - \lambda_p \text{Id}_E)(e_p) = \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p} e_k \in \langle e_1, e_2, \dots, e_{p-1} \rangle$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $g(e_p) = ((f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_{p-1} \text{Id}_E))[(f - \lambda_p \text{Id}_E)(e_p)] = 0$.

Donc $\forall x \in E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, $[(f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_n \text{Id}_E)](x) = 0$.

C'est-à-dire $(f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_n \text{Id}_E) = 0$ ou encore $\tilde{\pi}_f(f) = 0$

Exemple 3.8

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \tilde{\pi}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(2-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2. \end{aligned}$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} (A + I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ (A + I_3)^2(2I_3 - A) &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

On a donc $\tilde{\pi}_A(A) = 0 = -A^3 + 3A + 2I_3$

$$\Rightarrow A^3 - 3A = 2I_3$$

$$\Rightarrow A \times \left(\frac{A^2 - 3I_3}{2} \right) = \left(\frac{A^2 - 3I_3}{2} \right) \times A = I_3.$$

D'où A est inversible et $A^{-1} = \left(\frac{A^2 - 3I_3}{2} \right)$.

Propriété 3.9

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$, trigonalisable.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, non nécessairement distinctes.

Alors les valeurs propres de M^p , pour tout p de \mathbb{N} , sont $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p$.

Cet énoncé se généralise aux entiers relatifs p si M est inversible.

Remarques 3.10

- A ne pas confondre avec λ valeur propre de $M \Rightarrow \lambda^p$ valeur propre de $M^p, \forall p \geq 1$.
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. De plus les éléments diagonaux du produit sont les produits des éléments diagonaux des deux matrices.

Propriété 3.11

Si le polynôme caractéristique de M est scindé dans K , c'est-à-dire se décompose en un produit de polynôme de degré 1, alors $\text{tr}(M)$ (resp. $\det(M)$) est égale à la somme (resp. au produit) des valeurs propres de M chacune comptée autant de fois que sa multiplicité.

C'est toujours le cas si $K = \mathbb{C}$.

4. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans cette partie, E est un K -e.v. de dimension finie $n \geq 1$.

4.1. Définitions et premières propriétés

Rappel

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $\pi_r = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_r$ avec les P_i unitaires et deux à deux premiers entre eux.
 $E = \text{Ker}(P_1[f]) \oplus \text{Ker}(P_2[f]) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_r[f])$.
De plus, le polynôme minimal de la restriction de f à $\text{Ker}(P_i[f])$ est P_i .
- $\forall P \in K[X]$, $P[f]$ et f commutent donc $\text{Ker} P[f]$ est stable par f .
- Si $(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E , on a :
 $\mathcal{M}_{(\varepsilon)}(f)$ diagonale $\Leftrightarrow \forall i = 1, n, \varepsilon_i$ est un vecteur propre de f .

Définition 4.1

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(K)$.

On dit que M est diagonalisable si M est semblable à une matrice diagonale D , c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}MP$.

On dit alors que D est une réduite diagonale de M .

Définition 4.2

On dit qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Remarques 4.3

- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est diagonalisable.
- M est diagonalisable si et seulement si tout endomorphisme f d'un K -e.v. E de dimension n dont la matrice est M dans une base (e) de E est diagonalisable, et en particulier l'endomorphisme de K^n de matrice M dans la base canonique.
- Si M est diagonalisable et si N est semblable à M , alors N est diagonalisable.
- Rappel : Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.
On a pu donc définir la trace et le déterminant d'un endomorphisme f d'un e.v. de dimension finie comme étant la trace et le déterminant de la matrice représentative de f dans n'importe quelle base de E .

Propriété 4.4

Si un endomorphisme f de E est diagonalisable, alors $\det f$ est le produit des valeurs propres de f et $\text{tr}(f)$ est la somme des valeurs propres de f (comptées autant de fois que leur multiplicité).

Propriété 4.5

Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme minimal.

Démonstration

Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ .

Soit π_f le polynôme minimal de f .

Il existe $Q, R \in K[X]$ / $\pi_f = (X - \lambda)Q + R$ avec $\deg R < 1$ c'est-à-dire $R = c \in K$.

Or $\pi_f[f] = 0 = Q[f] \circ (f - \lambda \text{Id}) + c \text{Id}$ donc $0 = \pi_f[f](x) = cx \Rightarrow c = 0$. D'où $(X - \lambda)$ divise π_f .

Remarques 4.6

- On a donc que, si $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ est l'ensemble des valeurs propres de f , alors $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_r) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$ divise π_f .
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et si $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, alors son polynôme minimal est de la forme $\pi_f = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_r)^{n_r}$.
On a $\tilde{\pi}_f = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ avec $m_i \geq n_i \quad \forall i = 1, r$, car $\tilde{\pi}_f$ est un multiple de π_f .

4.2. Conditions de diagonalisabilité

Propriété 4.7

Soit f un endomorphisme de E (on rappelle que $\dim E = n \geq 1$).

Soient (E_1, E_2, \dots, E_r) les espaces propres associées à $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$.

f diagonalisable si et seulement si $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$
si et seulement si $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_r$.

Démonstration

Evidente.

Propriété 4.8

Soit f un endomorphisme de E de dimension n .

Si f admet n valeurs propres distinctes dans K , alors f est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Démonstration

Soient (E_1, E_2, \dots, E_r) les espaces propres associées aux valeurs propres de f .

D'après la propriété 1.64, la somme $E_1 + E_2 + \dots + E_r$ est directe.

Chacun des espaces étant de dimension au moins 1.

On a $\sum_{i=1}^r \dim E_i \geq n$ mais $\sum_{i=1}^r \dim E_i \leq \dim E = n$.

Donc $\forall i = 1, r \quad \dim E_i = 1$ et $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$.

Remarques 4.9

La condition précédente n'est pas nécessaire.

Par exemple si f est une homothétie de rapport λ , alors f est diagonalisable et pourtant f n'a pour seule valeur propre que λ , avec la multiplicité n .

Inversement, si f n'a qu'une valeur propre λ , de multiplicité $n = \dim E$, f est diagonalisable si et seulement si f est l'homothétie de rapport λ .

De même si M (élément de $\mathcal{M}_n(K)$) n'a que la valeur propre λ (ce qui est le cas par exemple si M est triangulaire avec des λ sur la diagonale), alors M est diagonalisable si et seulement si $M = \lambda I_n$.

Propriété 4.10

Soit f un endomorphisme de E .

Si f est diagonalisable, alors la restriction de f à un sous-espace stable F est un endomorphisme diagonalisable de F .

Propriété 4.11

Soit f un endomorphisme de E et π_f son polynôme minimal.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) f est diagonalisable.
- ii) π_f est scindé et n'a que des racines simples.

Démonstration

Soit $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres de f .

(i) \Rightarrow (ii) On suppose f diagonalisable.

Il existe $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E telle que $\mathcal{M}_{(e)}(f)$ est diagonale.

$\forall i = 1, n, \exists 1 \leq j \leq r / f(e_i) = \lambda_j e_i$.

Soit $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_r) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$.

On peut si nécessaire écrire $P = \left[\prod_{k=1; k \neq j}^r (X - \lambda_k) \right] (X - \lambda_j)$.

D'où $P[f] = \prod_{k=1}^r (f - \lambda_k \text{Id}) = \left[\prod_{k=1; k \neq j}^r (f - \lambda_k \text{Id}) \right] \circ (f - \lambda_j \text{Id})$.

Donc $\forall i = 1, n, P[f](e_i) = 0$ c'est-à-dire P est un polynôme annulateur de f donc un multiple de π_f . D'après la propriété précédente π_f est un multiple de P . Ils sont tous les deux unitaires donc $P = \pi_f$.

(ii) \Rightarrow (i) On suppose que π_f est scindé et n'a que des racines simples.

Càd $\pi_f = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_r)$ avec $a_i \in K$ et surtout les a_i deux à deux distincts.

Les $(X - a_i)$ sont donc premiers entre eux.

On a donc $E = \text{Ker}(X - a_1) \oplus \text{Ker}(X - a_2) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(X - a_r)$.

D'après la propriété 4.7, f est diagonalisable.

Remarque 4.12

f est diagonalisable si et seulement si f est annulé par un polynôme P scindé à racines simples puisque P est un multiple de π_f .

Exemple 4.13

Si l'application f vérifie $(f - 2\text{Id}) \circ (f + 3\text{Id}) = 0$, alors $E = E_2 \oplus E_{-3}$.

Si l'un des deux sous-espaces E_2 ou E_{-3} est réduit à $\{0\}$, c'est que f est une homothétie, de rapport -3 ou 2 respectivement. Sinon le spectre de f est exactement égal à $\{-3, 2\}$.

Propriété 4.14

Soit f un endomorphisme de E .

f est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique $\tilde{\pi}_f$ est scindé dans $K[X]$ et pour toute valeur propre λ (c'est-à-dire toute racine de $\tilde{\pi}_f$) la multiplicité $m(\lambda)$ est égale à la dimension $d(\lambda)$ du sous-espace propre E_λ .

Remarque 4.15

Avec les notations ci-dessus, les coefficients de la diagonale de D sont les valeurs propres de M , chacune figurant autant de fois que son ordre de multiplicité. Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P est la matrice de passage de la base canonique de K^n à une base de vecteurs propres de M .

Propriétés 4.16

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(K)$.

- Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si M est diagonalisable "dans \mathbb{R} " alors M est diagonalisable "dans \mathbb{C} ", avec les mêmes valeurs et vecteurs propres et la même égalité $D = P^{-1}MP$, les matrices P et D étant à coefficients réels.
- En revanche, toujours avec M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M peut être diagonalisable dans \mathbb{C} sans l'être dans \mathbb{R} , si des valeurs propres sont complexes mais non réelles.
Dans l'égalité $D = P^{-1}MP$, P et D sont alors à coefficients complexes.

Définition 4.17

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(f)$ de multiplicité m dans π_f le polynôme minimal de f .

Le s.e.v. $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^m$ est appelé sous-espace caractéristique de λ .

Remarque 4.18

Soit $M = (a_{i,j})_{i,j=1,n} \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\lambda \in K$ tels que $\forall j = 1, n, \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \lambda$ alors λ est une valeur propre de M .

En effet, si L_i est la i ème ligne de $M - \lambda I_n$, alors $L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{i,j} - \lambda) = 0$ donc les lignes sont liées i.e. $M - \lambda I_n$ non inversible.

5. Réduction de matrice : pratique et applications

5.1. Diagonalisation d'une matrice

On cherche à diagonaliser si possible une matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$.

- On calcule le polynôme caractéristique $\tilde{\pi}_M$ de la matrice M puis les racines dans K de ce polynôme.
- Si le polynôme $\tilde{\pi}_M$ n'est pas scindé dans K , alors M n'est pas diagonalisable dans K .
- Si au contraire $\tilde{\pi}_M$ est scindé alors pour chaque racine λ on résout le système homogène $(M - \lambda I_n)X = 0$, où X est une matrice colonne de K^n .
L'ensemble des solutions de ce système est le sous-espace propre E_λ .
La résolution conduit à une base $(e)_\lambda$ de E_λ , donc à $\dim(E_\lambda)$.

- Si, pour l'un des λ , on a $\dim(E_\lambda) < m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de $\tilde{\pi}_M$, alors M n'est pas diagonalisable.
- Sinon M est diagonalisable, et la juxtaposition des bases $(e)_\lambda$ donne une base de K^n , formée de vecteurs propres.
On en déduit la matrice de passage P de la base canonique à la base (e) , et l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale : ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M , dans l'ordre des vecteurs propres de la base (e) .

Les calculs précédents peuvent s'effectuer avec la méthode du pivot :

- On part de la matrice $A_\lambda = M - \lambda I_n$ que l'on transforme, par des opérations sur les lignes, en une matrice triangulaire B_λ .
- Les valeurs propres de M sont les λ tels que B_λ est non inversible c'est-à-dire les valeurs qui annulent au moins un coefficient diagonal de B_λ .
- Pour chacune de ces valeurs, le sous espace propre est obtenu en résolvant le système $B_\lambda X = 0$, qui est équivalent au système $(M - \lambda I_n)X = 0$.

5.2 Exemple de diagonalisation

On cherche à diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \tilde{\pi}_M = \det(M - XI_3) &= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 0 & -2-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-X \\ 0 & -2-X & 1 \\ 1-X & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-X \\ 0 & -2-X & 1 \\ 0 & 2+X & -1+2X-X^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-X \\ 0 & -2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2X-X^2 \end{vmatrix} \\ &= X(X+2)(2-X). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc -2 , 0 et 2 .

On pose $B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$.

On a $u = (x, y, z)$ vecteur propre de M de valeur propre $\lambda \Leftrightarrow (M - \lambda I_3)u = 0 \Leftrightarrow B_\lambda u = 0$.

- Pour $\lambda = -2$.

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in E_{-2} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $b_1 = (1, -1, 0)$. On a $E_{-2} = \langle b_1 \rangle$.

- Pour $\lambda = 0$.

$$u = (x, y, z) \in E_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = 2y \end{cases}$$

Soit $b_2 = (-3, 1, 2)$. On a $E_0 = \langle b_2 \rangle = \text{Ker } M$.

- Pour $\lambda = 2$.

$$u = (x, y, z) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 4y \end{cases}$$

Soit $b_3 = (3, 1, 4)$. On a $E_2 = \langle b_3 \rangle$.

$$\text{On a } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On obtient } P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on peut vérifier que } D = P^{-1}MP.$$

5.3 Exemple de trigonalisation

$$\text{On cherche à trigonaliser } M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det M = -2$.

$$\text{On obtient } \tilde{\pi}_M = \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} -2-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 3 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -2-X & 0 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = -(X+2)(X-1)^2.$$

Les valeurs propres de M sont donc -2 et 1 .

$$\text{On pose } B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) \end{pmatrix}.$$

(On n'a pas nécessairement besoin des B_λ , on pourrait utiliser directement la définition).

On a $u = (x, y, z)$ vecteur propre de M de valeur propre $\lambda \Leftrightarrow (M - \lambda I_3)u = 0 \Leftrightarrow B_\lambda u = 0$.

- Pour $\lambda = -2$.

$$u = (x, y, z) \in E_{-2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -z \end{cases}$$

Soit $v_1 = (3, 1, -1)$. On a $E_{-2} = \langle v_1 \rangle$.

- Pour $\lambda = 1$.

$$u = (x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Soit $v_2 = (0, 1, 0)$. On a $E_2 = \langle v_2 \rangle$.

Puisque $\dim E_1 \neq 2$, M n'est pas diagonalisable.

Mais le polynôme caractéristique de M est scindé donc on peut la trigonaliser.

On complète v_1, v_2 pour obtenir une base de \mathbb{R}^3 .

Par exemple en prenant $v_3 = (0, 0, 1)$.

On obtient $Mv_3 = (0, 3, 1) = 3v_2 + v_3$ et enfin $T = P^{-1}MP$ avec

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4. Application : Calcul des puissances d'une matrice

Si une matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable, l'égalité $D = P^{-1}MP$, où D est diagonale, permet d'écrire $M = PDP^{-1}$. Puis, pour tout entier naturel k , $M^k = PD^kP^{-1}$.

On peut généraliser aux entiers k relatifs si M est inversible.

Exemple

Soit la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à calculer M^{10} .

On a vu que $D = P^{-1}MP$

$$\text{avec } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $M^{10} = P \times D^{10} \times P^{-1}$.

$$P \times D^{10} = 1024 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1024 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^{10} = 128 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 128 \begin{pmatrix} -2 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 256 \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5.5. Application : Intégration des systèmes différentiels linéaires

Soit un système de $n \geq 2$ équations différentiels linéaires du 1er ordre, à coefficients constants, de n fonctions $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \frac{\partial X}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Le système (1) peut donc s'écrire $\frac{\partial X}{\partial t} = AX + B$.

Soit X_0 une solution particulière de ce système.

On a $\frac{\partial X_0}{\partial t} = AX_0 + B$ et, par différence, on obtient $\frac{\partial(X - X_0)}{\partial t} = A(X - X_0)$

La solution générale du système (1) s'obtient donc en ajoutant à une solution particulière la solution générale du système homogène $\frac{\partial X}{\partial t} = AX$, c'est-à-dire :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$\text{Soit } Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \text{ telle que } X = PY \text{ i.e } Y = P^{-1}X, \text{ on a } \frac{\partial Y}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} \end{pmatrix} = P^{-1} \frac{\partial X}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = AX \Rightarrow P \frac{\partial Y}{\partial t} = APY \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial t} = DY.$$

On est donc ramener à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} = \lambda_1 y_1(t) \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} = \lambda_n y_n(t) \end{cases}.$$

D'où
$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \text{ avec } c_1, c_2, \dots, c_n \in K.$$

On trouve X par la relation $X = PY$.

Exemple

On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}.$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a vu que $D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire
$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-2t} - 3c_2 + 3c_3 e^{2t} \\ x_2(t) = -c_1 e^{-2t} + c_2 + c_3 e^{2t} \\ x_3(t) = 2c_2 + 4c_3 e^{2t} \end{cases}.$$

6. Exponentiel de matrice et d'endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E est un K -e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

Rappel

- Puisque E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.
- $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est complet donc E est un espace de Banach (ou plus simplement un Banach) c'est-à-dire un e.v.n. complet.
- Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i \in K$,

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \geq 1$, l'application $\| \cdot \|_\alpha : x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}$ est une norme sur E .

$\| \cdot \|_\infty : x \mapsto \sup \{ |x_i|, \text{ où } 1 \leq i \leq n \}$ est une norme sur E .

Remarque 6.1

$$\| \cdot \|_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Propriété 6.2

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists M \in \mathbb{R}_+^* / |f(x)|_1 \leq M|x|_1.$$

Remarque 6.3

Puisque toutes les normes sont équivalentes, on a donc $\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists M \in \mathbb{R}_+^* / |f(x)| \leq M|x|$.

Démonstration

On pose $M_1 = \sup \{|f(e_i)|_1 \text{ où } i = 1, n\}$.

Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ avec $x_i \in K$, on a :

$$|f(x)|_1 = \left| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \right|_1 = \left| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i f(e_i)|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |f(e_i)|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot M_1 = M_1 \sum_{i=1}^n |x_i| = M_1 |x|_1.$$

Définition 6.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on appelle exponentielle de A et on note $\exp(A)$ ou e^A la limite, dans $\mathcal{M}_n(K)$, de la suite de terme général $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$. La matrice $\exp(A)$ est donc :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^p}{p!} + \dots$$

Remarque 6.5

On montre que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, la série de terme générale $\frac{A^k}{k!}$ est normalement convergente ce qui justifie la définition.

Exemple 6.6

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^2.$$

$$\text{Donc } \exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ D'où } \exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a aussi } A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, (A + B)^3 = A + B, (A + B)^4 = I_2, \dots (A + B)^{2k} = I_2, (A + B)^{2k+1} = A + B \dots$$

$$\text{Donc } \exp(A + B) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots & 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots & 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch1} & \text{sh1} \\ \text{sh1} & \text{ch1} \end{pmatrix}.$$

Remarques 6.7

- Pour tout λ de K , $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda)I_n$.
En particulier, $\exp(0 I_n) = I_n$.
- Si A, B commutent dans $\mathcal{M}_n(K)$, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
(C'est un résultat sur le produit de Cauchy de série absolument convergente)
- En particulier, pour tout A de $\mathcal{M}_n(K)$, $\exp(A)$ est une matrice carrée inversible et $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$.
- Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$
et $\exp(tA) = \text{diag}(\exp(t\lambda_1), \dots, \exp(t\lambda_n))$.
- L'application $t \mapsto f(t) = \exp(tA)$ est dérivable, et $f'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
- Supposons que A s'écrive $A = D + N$, avec D diagonale, N strictement triangulaire et $ND = DN$.
Une telle décomposition peut apparaître par exemple quand on trigonalise A .
Soit r un entier tel que $N^r = 0$.
Alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D)\sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$.
- Si $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ alors $\exp(M) = P\exp(D)P^{-1}$ et $\exp(tM) = P\exp(tD)P^{-1}$.

Propriété 6.8

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

La solution générale du système linéaire $\frac{\partial X(t)}{\partial t} = AX(t)$ est $X(t) = \exp(tA) \times k$ où $k \in K^n$.

Soit t_0 un réel, et X_0 un élément de \mathbb{R}^n .

L'unique solution de (H) qui vaut X_0 au point t_0 est l'application $t \mapsto X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$.

Remarque 6.9

$P^{-1}k$ où k varie sur K^n donne aussi un élément quelconque de K^n .

7. Base de Jordan

Rappel

f est nilpotent d'ordre $p \geq 1 \Leftrightarrow f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

Propriété 7.1

On suppose que $\dim E = n$ et soit $f \in \mathcal{S}(E)$ nilpotent d'ordre q .

On a $\{0_E\} = \text{Ker } f^0 \subset \text{Ker } f^1 \subset \text{Ker } f^2 \subset \dots \subset \text{Ker } f^q = E$ et toutes ces inclusions sont strictes.

Démonstration

On a $\text{Ker } f^0 = \text{Ker } \text{Id} = \{0\}$.

On doit montrer :

- $x \in \text{Ker } f^p \Rightarrow x \in \text{Ker } f^{p+1}$ pour tout $0 \leq p \leq q - 1$.
- $\text{Ker } f^p \neq \text{Ker } f^{p+1}$ pour tout $0 \leq p \leq q - 1$.

- $x \in \text{Ker} f^p \Rightarrow f^p(x) = 0 \Rightarrow f(f^p(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^{p+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker} f^{p+1}$.
- Par l'absurde, on suppose $\text{Ker} f^p = \text{Ker} f^{p+1}$ pour un certain $0 \leq p \leq q-1$.
Soit $x \in \text{Ker} f^{p+2}$, on a $f^{p+2}(x) = 0$ c'est-à-dire $f^{p+1}(f(x)) = 0$.
Donc $f(x) \in \text{Ker} f^{p+1}$ d'où $f(x) \in \text{Ker} f^p \Rightarrow f^p(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker} f^{p+1}$.
Donc $\text{Ker} f^{p+2} \subset \text{Ker} f^{p+1}$ c'est-à-dire $\text{Ker} f^{p+2} = \text{Ker} f^{p+1}$.
On montre ainsi par récurrence que $\text{Ker} f^p = \text{Ker} f^{p+1} = \text{Ker} f^{p+2} = \dots = \text{Ker} f^q = E$.
c'est-à-dire f nilpotente d'ordre inférieur à p : contraire aux hypothèses.

Propriété 7.2

On suppose que $\dim E = n$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre q et soit $a \in E / f^{q-1}(a) \neq 0$.

Alors $\mathcal{F} = (a, f(a), f^2(a), \dots, f^{q-1}(a))$ est une famille libre de E .

En particulier, si $q = n$ alors \mathcal{F} est une base de E .

Démonstration

$$\begin{aligned} & \lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \lambda_2 f^2(a) + \dots + \lambda_{q-1} f^{q-1}(a) = 0 \\ \Rightarrow & f(\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \lambda_2 f^2(a) + \dots + \lambda_{q-1} f^{q-1}(a)) = f(0) \\ \Rightarrow & \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f^2(a) + \lambda_2 f^3(a) + \dots + \lambda_{q-2} f^{q-1}(a) + \lambda_{q-1} f^q(a) = 0 \\ \Rightarrow & \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f^2(a) + \lambda_2 f^3(a) + \dots + \lambda_{q-2} f^{q-1}(a) = 0 \end{aligned}$$

On continue ainsi :

$$\Rightarrow \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f^2(a) + \lambda_2 f^3(a) + \dots + \lambda_{q-3} f^{q-1}(a) = 0$$

.....

$$\Rightarrow \lambda_0 f^{q-2}(a) + \lambda_1 f^{q-1}(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 f^{q-1}(a) = 0$$

Puisque $f^{q-1}(a) \neq 0$, on a donc $\lambda_0 = 0$ et en remontant $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{q-1} = 0$.

Remarques 7.3

- Dans le cas où f est nilpotent d'ordre n , la matrice dans la base $(f^{q-1}(a), f^{q-2}(a), \dots, f^2(a), f(a), a)$

$$\text{de } f \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Une telle matrice s'appelle un bloc de Jordan d'ordre } n.$$

- Dans le cas où f est nilpotent d'ordre $q < n$, la famille \mathcal{F} est libre mais n'a que q éléments.

On peut construire une base (b) de la forme suivante :

$(b) = \{f^{s_1-1}(b_1), \dots, f(b_1), b_1\} \cup \{f^{s_2-1}(b_2), \dots, f(b_2), b_2\} \cup \dots \cup \{f^{s_r-1}(b_r), \dots, f(b_r), b_r\}$ telle que, dans une telle base, la matrice de f soit une matrice diagonale par blocs et que chacun de ces blocs soit un bloc de Jordan. Une telle base si elle existe s'appelle une base de Jordan pour f .

On veut donc $(\beta) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ telle que $f(\beta_i) = \beta_{i-1}$ ou 0 pour $2 \leq i \leq n$ et $f(\beta_1) = 0$.

Définition 7.4

Soit λ une valeur propre de multiplicité $m(\lambda)$ de $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle sous espace caractéristique de f pour la valeur propre λ le s.e.v. $N_c(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{m(\lambda)}$.

Propriété 7.5

On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.

On suppose que de plus que $\tilde{\pi}_f$ le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{S}_K(E)$ est scindé sur K . Par exemple, $\tilde{\pi}_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{k_1} (X - \lambda_2)^{k_2} \dots (X - \lambda_q)^{k_q}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, $k_i = m(\lambda_i)$ et $k_1 + k_2 + \dots + k_q = n$.

- $E = Nc(\lambda_1) \oplus Nc(\lambda_2) \oplus \dots \oplus Nc(\lambda_q)$.
- $Nc(\lambda_i) = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{k_i}$ est stable par f .
- $\dim Nc(\lambda_i) = \dim \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{k_i} = k_i$.
- Le polynôme caractéristique de la restriction de f au sous espace caractéristique $Nc(\lambda_i)$ est $(\lambda_i - X)^{k_i}$.

Démonstration

On pose $T_i = (X - \lambda_i)$, $P_i = T_i^{k_i}$, $Nc(\lambda_i) = \text{Ker} P_i(f)$ et $d_i = \dim Nc(\lambda_i)$.

- On a $\tilde{\pi}_f(f) = 0$. Le résultat découle donc directement de la propriété 1.44.
- On a $(f - \lambda_i \text{Id})^{k_i} = P_i[f]$. Or $P_i[f]$ et f commutent donc $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{k_i}$ est stable par f .
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs. Chacun des blocs correspondant aux $Nc(\lambda_i)$.

$P_i(f)$ et $T_i(f)$ commutent donc $Nc(\lambda_i)$ est stable par $T_i(f)$.

Soit g la restriction de $T(f)$ à $Nc(\lambda_i)$ et h la restriction de f à $Nc(\lambda_i)$.

On a $g = h - \lambda_i \text{Id}$. De plus g et h sont des applications linéaires de $Nc(\lambda_i)$ dans $Nc(\lambda_i)$ (i.e. $g, h \in \mathcal{S}(Nc(\lambda_i))$).

Par définition de $Nc(\lambda_i)$, $g^{k_i} = 0$, g est nilpotente d'un ordre inférieur ou égale à k_i .

D'après le troisième point de la remarque 3.7, $\tilde{\pi}_g = (-1)^{d_i} X^{d_i}$.

$\tilde{\pi}_g$ est donc scindé sur K , il existe une base (b) dans laquelle la matrice A de g est triangulaire supérieure. Les éléments de la diagonale, étant les valeurs propres, sont tous nuls.

On a donc $\mathcal{M}_{(b)}(h) = A + \lambda_i I_n$ est une matrice triangulaire supérieure et les éléments de la diagonale sont tous égaux à λ_i .

D'où $\tilde{\pi}_h = (-1)^{d_i} (X - \lambda_i)^{d_i}$.

D'après la propriété 2.12, $\tilde{\pi}_f = \tilde{\pi}_h Q$ avec $Q \in K[X]$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

On a $(\tilde{\pi}_h Q)[f] = 0$ et $\tilde{\pi}_h$ et Q premiers entre eux.

Donc $\tilde{\pi}_f = \prod_{i=1}^q (-1)^{d_i} (X - \lambda_i)^{d_i}$.

D'où $d_i = k_i$.

- D'après le point précédent avec h .

Définition 7.6

On appelle matrice de Jordan toute matrice soit d'ordre 1 soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Propriété 7.7

Soit $J(\lambda)$ une matrice de Jordan d'ordre s . On a : $\tilde{\pi}_{J(\lambda)} = (-1)^s (X - \lambda)^s$, $\pi_{J(\lambda)} = (X - \lambda)^s$ et $\dim E_\lambda = 1$.

Démonstration

Il suffit de revenir aux définitions.

Remarque 7.8

On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$.

On suppose que de plus que π_f le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}_K(E)$ est scindé sur K .

On a : $\pi_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{k_1} (X - \lambda_2)^{k_2} \dots (X - \lambda_q)^{k_q}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $k_1 + k_2 + \dots + k_q = n$.

$$\pi_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_q)^{r_q} \text{ avec } r_i \leq k_i.$$

Puisque $r_i \leq k_i$ et $(f - \lambda_i \text{Id})(0) = 0$, on a $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{r_i} \subset \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{k_i}$
et $\dim \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{r_i} \leq \dim \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{k_i}$.

Or, d'après le théorème 1.46, $E = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})^{r_1} \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_q \text{Id})^{r_q}$.

On a donc $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{r_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{k_i}$

La restriction g_i de $f - \lambda_i \text{Id}_E$ à $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{r_i}$ est nilpotente d'ordre r_i .

On peut donc construire une base $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{r_i}$ de la forme $(g^{r_i-1}(u_i), \dots, g^2(u_i), g(u_i), u_i)$.

La matrice de la restriction de f dans cette base est une matrice de Jordan d'ordre r_i .

On construit une telle base pour chacun des λ_i .

La juxtaposition de toutes ces bases est une base de E dans laquelle la base de f est une matrice diagonale par blocs. Chacun de ces blocs étant une matrice de Jordan.

Propriété 7.9

Si K est un corps algébriquement clos ($K = \mathbb{C}$ par exemple), alors tout endomorphisme de E (de dim finie $n \geq 1$) admet une base dans laquelle sa matrice est formée de matrices de Jordan.

Lemme 7.10

On suppose E de dimension finie n .

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$ nilpotente d'ordre q .

On pose $H_k = \text{Ker } f^k \ \forall 0 \leq k \leq q$.

On a $\{0\} = H_0 \subset (\neq) H_1 \subset (\neq) \dots \subset (\neq) H_q = E$.

De plus, $\forall 0 \leq k \leq q$, soit G_k le supplémentaire de H_k dans H_{k+1} c'est-à-dire $H_{k+1} = G_k \oplus H_k$.

On a : $f(G_k) \subset H_k$

$$f(G_k) \cap H_{k-1} = \{0\}$$

L'image d'une base de G_k par f est une base de $f(G_k)$.

Donc il existe G'_k tel que $f(G_k) \subset G'_k$ et $H_k = G'_k \oplus H_{k-1}$.

Remarque 7.11

$x \neq 0$.

$$\begin{aligned} x \in G_k &\Rightarrow f^k(x) \neq 0 \text{ et } f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow f^{k-1}(f(x)) \neq 0 \text{ et } f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) \in H_k \text{ et } f(x) \notin H_{k-1} \end{aligned}$$